

线性常时滞时变系统的有限时间稳定性分析*

陈珂, 张丽霞, 孙敏慧**

(中国海洋大学数学科学学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 本文研究了一类线性常时滞时变系统的有限时间有界与输入-输出有限时间稳定性问题,通过构造 Lyapunov 泛函,并利用时变的矩阵不等式,分别获得了线性常时滞时变系统的有限时间有界和输入-输出有限时间稳定的充分条件。同时,设计了状态反馈控制器,使得闭环系统有限时间有界且输入-输出有限时间稳定,并通过仿真算例验证了本文方法的有效性。

关键词: 线性时滞系统; 输入-输出有限时间稳定; 时变矩阵不等式; Lyapunov 函数

中图分类号: TP13

文献标志码: A

文章编号: 1672-5174(2023)12-163-06

DOI: 10.16441/j.cnki.hdx.20220017

引用格式: 陈珂, 张丽霞, 孙敏慧. 线性常时滞时变系统的有限时间稳定性分析[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版), 2023, 53(12): 163-168.

Chen Ke, Zhang Lixia, Sun Minhui. Finite-time stability analysis of time-varying linear system with constant delay[J]. Periodical of Ocean University of China, 2023, 53(12): 163-168.

有限时间稳定是非常经典的数学概念^[1-4],该概念可以追溯到 20 世纪 60 年代,在 1961 年首次被提出^[1]。在随后的研究中,有限时间稳定性理论逐渐受到学者们的广泛关注。在一些工程领域,如航空航天控制系统、采样控制系统和机械控制系统,有限时间稳定有着非常广泛的应用^[5-8]。

目前,有限时间稳定性理论大概可以分为两类:一类是由 Bhat 和 Bernstein 提出的有限时间收敛性^[9],有限时间收敛理论表明,在系统满足 Lyapunov 渐近稳定性的前提下,系统状态在一个相对有限的周期内收敛到平衡点^[10-11];另一种类型的有限时间稳定性理论是由 Amato 等^[12]提出的,根据该理论,如果初始状态是范数有界的,则系统的状态在给定的有限时间区间内不超过预定的边界。本文研究的是第二种类型。

有限时间有界性理论表明,如果初始状态和外部输入是有界的,则系统状态在预先给定的有限周期内不会超过预定的边界^[13-15],因此,有限时间稳定是有限时间有界的一种特例。文献^[16-17]研究了异步切换系统的输入-输出有限时间稳定性问题。Amato 和 Ariola 将上述方法推广到线性离散系统中,得出了输出反馈控制器的设计条件^[18]。Van Mellaer 对随机系统的有限时间稳定控制进行了研究^[19]。之后,又有大批学

者取得了有关有限时间稳定性的显著成果,文献^[20]研究了时滞跳变系统的有限时间稳定性问题,文献^[21-22]研究了带有增益控制的有限时间有界性问题。虽然有限时间稳定性的相关研究已取得了丰富的研究成果,然而这些结果主要集中在线性定常系统,而对线性时变系统还较少检索到相关的工作。

本文在前人研究的基础上,将有限时间稳定性理论推广到线性常时滞时变系统。首先,通过选取合适的 Lyapunov 泛函,以时变的矩阵不等式形式给出有限时间稳定的充分条件;其次,提出了状态反馈控制器的设计方法;最后,通过仿真算例验证了这种控制器的可行性。

文中用到一些符号,其中 \mathbf{R}^n 表示 n 维实向量空间。 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 表示全体 $n \times n$ 维实矩阵的集合, $\mathbf{A} < 0$ (≤ 0) 表示 \mathbf{A} 是对称负定(半负定)矩阵, \mathbf{A}^T 表示矩阵 \mathbf{A} 的转置, \mathbf{A}^{-1} 表示矩阵 \mathbf{A} 的逆, $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的最大特征值, $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的最小特征值, $L_2^n[0, +\infty)$ 表示 n 维 L_2 空间。

1 问题描述与预备知识

考虑如下线性连续常时滞时变系统:

* 基金项目:国家自然科学基金项目(11701537);山东省自然科学基金项目(ZR2019MF027)资助

Supported by the National Natural Science Foundation of China (11701537); the Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2019MF027)

收稿日期:2022-01-06; 修订日期:2022-02-10

作者简介:陈珂(1996—),女,硕士生。E-mail: shell9ck@163.com

** 通信作者: E-mail: sunminhui@ouc.edu.cn

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d(t)\mathbf{x}(t-d) + \\ \quad \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(t) = \Phi(t), t \in [-d, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{G}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{A}_d(t)$ 是具有适当维数的时变矩阵; d 为状态时滞; $\Phi(t)$ 为初始条件; $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态变量; $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入; $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^l$ 是控制输出; $\mathbf{w}(t) \in L_2^n[0, +\infty)$ 是外部扰动。

定义 1 给定标量 $c_1 < c_2, T > 0$, 矩阵 $\mathbf{R} > 0$, 矩阵 $\mathbf{S}_1 > 0$, 称系统(1)关于 $(c_1, c_2, T, \mathbf{R}, \mathbf{S}_1)$ 是有限时间有界的, 如果系统满足以下条件:

$$\mathbf{w}(t) \in L_2[0, T]: \int_0^T \mathbf{w}^T(t)\mathbf{S}_1\mathbf{w}(t)dt \leq 1, \quad (2)$$

有

$$\begin{aligned} \max\{\mathbf{x}^T(s)\mathbf{R}\mathbf{x}(s)\} &\leq c_1, s \in [-d, 0] \Rightarrow \\ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{x}(t) &\leq c_2, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3)$$

定义 2 对于给定常数 $T > 0$, 矩阵 $\mathbf{S}_1 > 0, \mathbf{S}_2 > 0$, 称系统(1)关于 $(T, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$ 是输入-输出有限时间稳定的, 如果在零初始条件下, 对于扰动输入 $\mathbf{w}(t)$, 系统满足

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{w}^T(t)\mathbf{S}_1\mathbf{w}(t)dt &\leq 1 \Rightarrow \\ \mathbf{y}^T(t)\mathbf{S}_2\mathbf{y}(t) &\leq 1, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4)$$

问题描述: 对于系统(1), 给定正数 c_1, c_2, T , 其中 $c_1 < c_2$, 矩阵 $\mathbf{R} > 0$ 和矩阵 $\mathbf{S}_1 > 0, \mathbf{S}_2 > 0$, 设计状态反馈控制器

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t), \quad (5)$$

使得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d(t)\mathbf{x}(t-d) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(t) = \Phi(t), t \in [-d, 0], \end{cases} \quad (6)$$

关于 $(c_1, c_2, T, \mathbf{R}, \mathbf{S}_1)$ 是有限时间有界的, 且对 (T, \mathbf{S}_2) 是输入-输出有限时间稳定的, 其中 $\bar{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)$ 。

2 主要结论

2.1 有限时间有界

本小节主要考虑当 $\mathbf{u}(t) = 0$ 时系统(1)的有限时间有界性, 主要结果由以下定理给出。

定理 1(有限时间有界的充分条件) 给定正数 c_1, c_2, T , 其中 $c_1 < c_2$, 矩阵 $\mathbf{R} > 0, \mathbf{S}_1 > 0$ 。当 $\mathbf{u}(t) = 0$ 时系统(1)关于 $(c_1, c_2, T, \mathbf{R}, \mathbf{S}_1)$ 是有限时间有界的, 如果存在一个标量 $\alpha > 0$ 和正定对称矩阵 $\mathbf{Q}_1(t), \mathbf{Q}_2(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 满足 $\forall t \in [0, T]$ 有:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) & \tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{A}_d(t) & \tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{G}(t) \\ \mathbf{A}_d^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) & -e^{\alpha d}\tilde{\mathbf{Q}}_2(t) & 0 \\ \mathbf{G}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) & 0 & -\mathbf{S}_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

$$e^{\alpha T} \left[1 + \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_1(0))c_1 - \frac{1}{\alpha}c_1\lambda_{\max}(\mathbf{Q}_2(0)) + \right. \quad (8)$$

$$\left. \frac{1}{\alpha}c_1\lambda_{\max}(\mathbf{Q}_2(0))e^{\alpha d} \right] < c_2\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_1(t)),$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{Q}}}_2(t) \leq 0, \quad (9)$$

式中: $\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_1(t)\mathbf{R}^{\frac{1}{2}}, \tilde{\mathbf{Q}}_2(t) = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_2(t)\mathbf{R}^{\frac{1}{2}}, \boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{A}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) + \tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{A}(t) - \alpha\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) + \tilde{\mathbf{Q}}_2(t) + \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}_1(t)$ 。

证明 选取 Lyapunov 泛函为

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{x}(t) + \\ &\int_{t-d}^t e^{\alpha(t-s)}\mathbf{x}^T(s)\tilde{\mathbf{Q}}_2(t)\mathbf{x}(s)ds, \end{aligned}$$

则 $V(\mathbf{x}(t))$ 沿着系统(1)求导, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{x}^T(t)\mathbf{A}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \\ &\mathbf{x}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{A}_d(t)\mathbf{x}(t-d) + \mathbf{x}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) + \\ &\mathbf{x}^T(t-d)\mathbf{A}_d^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}^T(t)\mathbf{G}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{x}(t) + \\ &\mathbf{x}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_2(t)\mathbf{x}(t) - e^{\alpha d}\mathbf{x}^T(t-d)\tilde{\mathbf{Q}}_2(t)\mathbf{x}(t-d) - \\ &\alpha\mathbf{x}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{x}(t) + \alpha V + \mathbf{x}^T(t)\dot{\tilde{\mathbf{Q}}}_1(t)\mathbf{x}(t) + \\ &\int_{t-d}^t e^{\alpha(t-s)}\mathbf{x}^T(s)\dot{\tilde{\mathbf{Q}}}_2(t)\mathbf{x}(s)ds. \end{aligned}$$

将 \dot{V} 表示成矩阵的形式:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-d) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix}^T \cdot \\ &\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) & \tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{A}_d(t) & \tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{G}(t) \\ \mathbf{A}_d^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) & -e^{\alpha d}\tilde{\mathbf{Q}}_2(t) & 0 \\ \mathbf{G}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \\ &\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-d) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} + \alpha V + \int_{t-d}^t e^{\alpha(t-s)}\mathbf{x}^T(s)\dot{\tilde{\mathbf{Q}}}_2(t)\mathbf{x}(s)ds. \end{aligned}$$

$$\dot{V} - \alpha V - \mathbf{w}^T(t)\mathbf{S}_1\mathbf{w}(t) =$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-d) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) & \tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{A}_d(t) & \tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{G}(t) \\ \mathbf{A}_d^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) & -e^{\alpha d}\tilde{\mathbf{Q}}_2(t) & 0 \\ \mathbf{G}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \\ &\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-d) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-d) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{S}_1 \end{pmatrix} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-d) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} + \int_{t-d}^t e^{\alpha(t-s)} \mathbf{x}^T(s) \dot{\mathbf{Q}}_2(t) \mathbf{x}(s) ds = \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-d) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) & \tilde{\mathbf{Q}}_1(t) \mathbf{A}_d(t) & \tilde{\mathbf{Q}}_1(t) \mathbf{G}(t) \\ \mathbf{A}_d^T(t) \tilde{\mathbf{Q}}_1(t) & -e^{\alpha d} \tilde{\mathbf{Q}}_2(t) & 0 \\ \mathbf{G}^T(t) \tilde{\mathbf{Q}}_1(t) & 0 & -\mathbf{S}_1 \end{pmatrix} \cdot \\ & \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-d) \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix} + \int_{t-d}^t e^{\alpha(t-s)} \mathbf{x}^T(s) \dot{\mathbf{Q}}_2(t) \mathbf{x}(s) ds. \end{aligned}$$

根据定理条件(7)则有

$$\dot{\mathbf{V}} - \alpha \mathbf{V} - \mathbf{w}^T(t) \mathbf{S}_1 \mathbf{w}(t) < 0,$$

即

$$\dot{\mathbf{V}} - \alpha \mathbf{V} < \mathbf{w}^T(t) \mathbf{S}_1 \mathbf{w}(t).$$

将不等式的两边同时乘以 $e^{-\alpha t}$, 可得

$$\frac{d}{dt} (e^{-\alpha t} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))) < e^{-\alpha t} \mathbf{w}^T(t) \mathbf{S}_1 \mathbf{w}(t).$$

将上述不等式从 0 到 t 进行积分可得

$$e^{-\alpha t} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{V}(\mathbf{x}(0)) < \int_0^t e^{-\alpha s} \mathbf{w}^T(s) \mathbf{S}_1 \mathbf{w}(s) ds,$$

注意到 $\alpha > 0$, 我们可得

$$e^{-\alpha t} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{V}(\mathbf{x}(0)) < \int_0^t \mathbf{w}^T(s) \mathbf{S}_1 \mathbf{w}(s) ds \leq 1,$$

即

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) < e^{\alpha t} (1 + \mathbf{V}(\mathbf{x}(0))),$$

则由上式可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^T(t) \tilde{\mathbf{Q}}_1(t) \mathbf{x}(t) < \mathbf{x}^T(t) \tilde{\mathbf{Q}}_1(t) \mathbf{x}(t) + \\ & \int_{t-d}^t e^{\alpha(t-s)} \mathbf{x}^T(s) \tilde{\mathbf{Q}}_2(s) \mathbf{x}(s) ds < \\ & e^{\alpha t} [1 + \mathbf{x}^T(0) \tilde{\mathbf{Q}}_1(0) \mathbf{x}(0) + \\ & \int_{-d}^0 e^{-\alpha s} \mathbf{x}^T(s) \tilde{\mathbf{Q}}_2(0) \mathbf{x}(s) ds]. \end{aligned}$$

又由 $\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_1(t) \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}, \tilde{\mathbf{Q}}_2(t) = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_2(t) \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}$, 可得

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min}(\mathbf{Q}_1(t)) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{x}(t) < \\ & e^{\alpha t} [1 + \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_1(0)) c_1 + \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_2(0)) \int_{-d}^0 e^{-\alpha s} c_1 ds] = \\ & e^{\alpha t} [1 + \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_1(0)) c_1 + c_1 \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_2(0)) \int_{-d}^0 e^{-\alpha s} ds] = \\ & e^{\alpha t} [1 + \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_1(0)) c_1 - c_1 \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_2(0)) \frac{1}{\alpha} (1 - e^{\alpha d})] \leq \\ & e^{\alpha T} [1 + \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_1(0)) c_1 - \frac{1}{\alpha} c_1 \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_2(0)) + \\ & \frac{1}{\alpha} c_1 \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_2(0)) e^{\alpha d}]. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{x}(t) < \\ & \frac{e^{\alpha T} [1 + \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_1(0)) c_1 - \frac{1}{\alpha} c_1 \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_2(0)) + \frac{1}{\alpha} c_1 \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_2(0)) e^{\alpha d}]}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_1(t))} < \end{aligned}$$

$c_2, \forall t \in [0, T]$ 。

由定义 1 可知, 当 $\mathbf{u}(t) = 0$ 时系统 (1) 关于 $(c_1, c_2, T, \mathbf{R}, \mathbf{S}_1)$ 是有限时间有界的。

2.2 输入-输出有限时间稳定

本小节主要研究系统 (1) 的输入-输出有限时间稳定性, 主要结果由以下定理给出。

定理 2 (输入-输出有限时间稳定的充分条件) 给定标量 $T > 0$, 矩阵 $\mathbf{S}_1 > 0, \mathbf{S}_2 > 0$, 当 $\mathbf{u}(t) = 0$ 时系统 (1) 关于 $(T, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$ 是输入-输出有限时间稳定的, 如果存在标量 $\alpha > 0, \beta > 0$ 与正定对称矩阵 $\mathbf{Q}_1(t), \mathbf{Q}_2(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}, \forall t \in [0, T]$ 满足公式 (7)、(9) 及以下条件:

$$\mathbf{C}^T(t) \mathbf{S}_2 \mathbf{C}(t) \leq \beta \tilde{\mathbf{Q}}_1(t), \quad (10)$$

$$\beta e^{\alpha T} \leq 1, \quad (11)$$

式中: $\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_1(t) \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}; \tilde{\mathbf{Q}}_2(t) = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_2(t) \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}$ 。

证明 选取 Lyapunov 泛函为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) = & \mathbf{x}^T(t) \tilde{\mathbf{Q}}_1(t) \mathbf{x}(t) + \\ & \int_{t-d}^t e^{\alpha(t-s)} \mathbf{x}^T(s) \tilde{\mathbf{Q}}_2(t) \mathbf{x}(s) ds, \end{aligned}$$

由定理 1 的证明可知

$$e^{-\alpha t} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{V}(\mathbf{x}(0)) < \int_0^t e^{-\alpha s} \mathbf{w}^T(s) \mathbf{S}_1 \mathbf{w}(s) ds,$$

注意到零初始条件, 可得

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) < e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} \mathbf{w}^T(s) \mathbf{S}_1 \mathbf{w}(s) ds,$$

则有

$$\begin{aligned} & \mathbf{y}^T(t) \mathbf{S}_2 \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{C}^T(t) \mathbf{S}_2 \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) \leq \\ & \beta \mathbf{x}^T(t) \tilde{\mathbf{Q}}_1(t) \mathbf{x}(t) \leq \beta \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \\ & \beta e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} \mathbf{w}^T(s) \mathbf{S}_1 \mathbf{w}(s) ds \leq \beta e^{\alpha t} \leq \beta e^{\alpha T}. \end{aligned}$$

故

$$\mathbf{y}^T(t) \mathbf{S}_2 \mathbf{y}(t) < 1.$$

由定义 2 可知, 当 $\mathbf{u}(t) = 0$ 时线性常时滞系统 (1) 关于 $(T, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$ 是输入-输出有限时间稳定的。

2.3 控制器设计

本小节将根据以上的定理条件, 给出闭环系统控制器 (5) 的设计方法。

定理 3 如果存在标量 $\alpha > 0, \beta > 0, \mathbf{Q}_1(t) > 0, \mathbf{Q}_2(t) > 0$ 和矩阵 $\mathbf{L}(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}, \forall t \in [0, T]$, 满足 (8) — (11) 式及以下条件:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1(t) & \tilde{\mathbf{Q}}_1(t) \mathbf{A}_d(t) & \tilde{\mathbf{Q}}_1(t) \mathbf{G}(t) \\ \mathbf{A}_d^T(t) \tilde{\mathbf{Q}}_1(t) & -e^{\alpha d} \tilde{\mathbf{Q}}_2(t) & 0 \\ \mathbf{G}^T(t) \tilde{\mathbf{Q}}_1(t) & 0 & -\mathbf{S}_1 \end{pmatrix} < 0, \quad (12)$$

则存在状态反馈控制器(5),使得闭环系统(6)关于 $(c_1, c_2, T, \mathbf{R}, \mathbf{S}_1)$ 是有限时间有界且关于 $(T, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$ 是输入输出有限时间稳定的,其中,

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{L}(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1^{-1}(t), \tag{13}$$

且 $\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_1(t)\mathbf{R}^{\frac{1}{2}}, \tilde{\mathbf{Q}}_2(t) = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}_2(t)\mathbf{R}^{\frac{1}{2}},$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_1(t) = & \mathbf{A}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) + \tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{A}(t) - \alpha\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) + \\ & \tilde{\mathbf{Q}}_2(t) + \tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{L}(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1^{-1}(t) + \\ & \tilde{\mathbf{Q}}_1^{-1}(t)\mathbf{L}^T(t)\mathbf{B}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) + \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}_1(t). \end{aligned}$$

证明 当 $\mathbf{K}(t) = \mathbf{L}(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1^{-1}(t)$ 时, $\bar{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{L}(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1^{-1}(t), \boldsymbol{\theta}_1(t) = \bar{\mathbf{A}}^T(t)\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) + \tilde{\mathbf{Q}}_1(t)\bar{\mathbf{A}}(t) - \alpha\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) + \tilde{\mathbf{Q}}_2(t) + \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}_1(t).$

由(8),(9),(12)式及定理1可知,闭环系统(6)是有限时间有界的,由(10)–(12)式及定理2知闭环系统(6)是输入-输出有限时间稳定的。

3 仿真举例

本节中,我们将给出一个数值例子来说明所给结果的有效性。

考虑线性系统(1),参数如下:

$$c_1 = 0.1, c_2 = 3, T = 3, d = 0.1, \mathbf{S}_1 = 0.2, \mathbf{S}_2 = 0.1,$$

$$\mathbf{w}(t) = 0.1\sin(t), \mathbf{R} = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 + 0.1\sin(t) \\ -0.5 & -0.1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (1 \ 0).$$

图1是系统(1)在无控制和 $\mathbf{x}(0) = (-1 \ 1)^T$ 下的系统状态。由于 $\mathbf{Q}_1(t), \mathbf{Q}_2(t), \mathbf{K}(t)$ 是连续时变的,

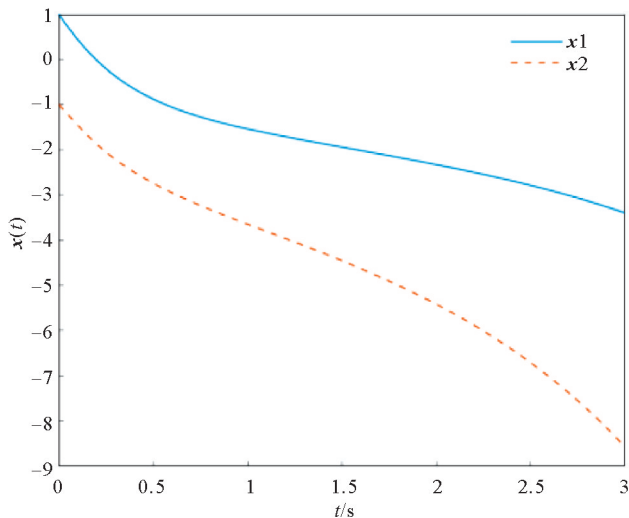


图1 开环系统的 $\mathbf{x}(t)$ 的轨迹

Fig. 1 Trajectory of $\mathbf{x}(t)$ of the open-loop system

因此不能直接求解。为了便于计算,我们将时间区间离散成等间隔的子区间。如果子区间的长度足够小,则连续函数可以用分段函数逼近。具体地说,将 $[0, T]$ 离散为等间隔时间 $t_i (i = 0, 1, 2, \dots, N)$, 其中 $t_0 = 0, t_N = T, t_k - t_{k-1} = \epsilon = T/N$ 。当 ϵ 足够小时,在 $(t_{k-1}, t_k]$ 上,时变矩阵函数 $\mathbf{Q}_1(t), \mathbf{Q}_2(t), \mathbf{K}(t)$ 可表示为 $\mathbf{Q}_1(t) = \mathbf{Q}_1(t_k), \mathbf{Q}_2(t) = \mathbf{Q}_2(t_k), \mathbf{K}(t) = \mathbf{K}(t_k)$ 因此,为了方便仿真,我们可以将 $\dot{\mathbf{Q}}_1(t)$ 与 $\dot{\mathbf{Q}}_2(t), \dot{\mathbf{K}}(t)$ 分别表示为 $(\mathbf{Q}_1(t_k) - \mathbf{Q}_1(t_{k-1}))/\epsilon, (\mathbf{Q}_2(t_k) - \mathbf{Q}_2(t_{k-1}))/\epsilon, (\mathbf{K}(t_k) - \mathbf{K}(t_{k-1}))/\epsilon$ 。

通过定理3,我们设计了一个使系统有限时间稳定的状态反馈控制器,图2即为状态反馈控制器的时间轨迹。由图3、4、5可知,在状态反馈控制器下,系统在 $0 \sim 3$ s 内满足 $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{x}(t) \leq 3, \mathbf{y}^T(t)\mathbf{S}_2\mathbf{y}(t) \leq 1$, 从而是有限时间有界且输入-输出有限时间稳定的。

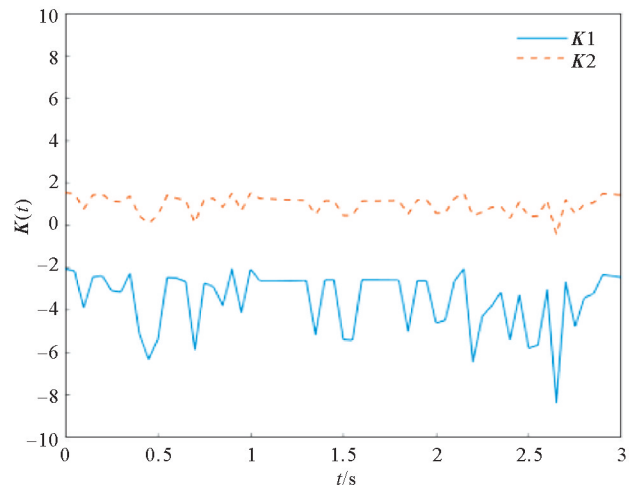


图2 控制器 $\mathbf{K}(t)$ 的变化轨迹

Fig. 2 Trajectory of $\mathbf{K}(t)$ of the controller

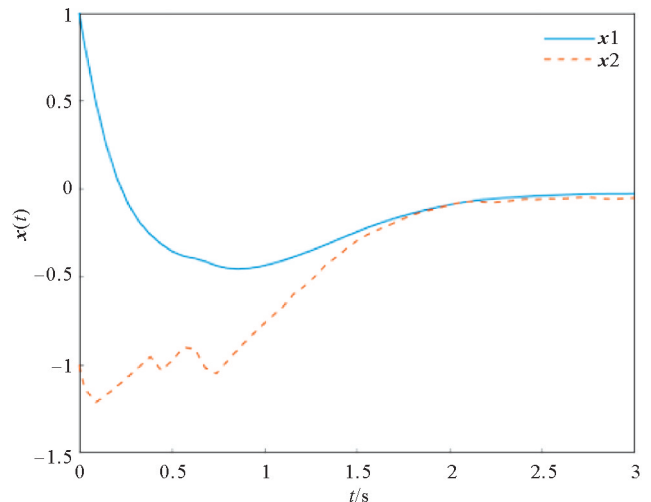
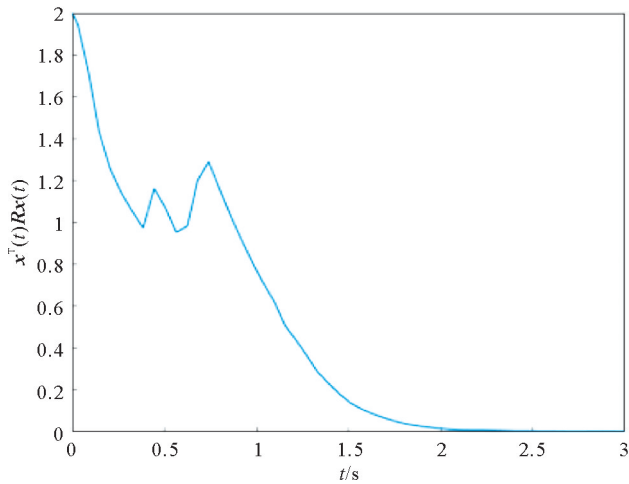
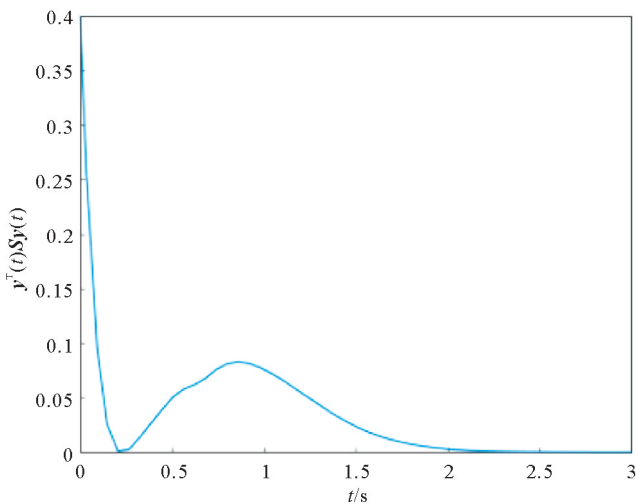


图3 闭环系统的 $\mathbf{x}(t)$ 的轨迹

Fig. 3 Trajectory of $\mathbf{x}(t)$ of the closed-loop system

图 4 闭环系统的 $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{x}(t)$ 的轨迹Fig. 4 Trajectory of $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{x}(t)$ of the closed-loop system图 5 闭环系统的 $\mathbf{y}^T(t)\mathbf{S}\mathbf{y}(t)$ 的轨迹Fig. 5 Trajectory of $\mathbf{y}^T(t)\mathbf{S}\mathbf{y}(t)$ of the closed-loop system

4 结语

本文通过构造 Lyapunov 泛函, 给出了线性常时滞时变系统有限时间有界和输入-输出有限时间稳定的充分性条件, 并设计了状态反馈控制器, 最后通过仿真算例验证了定理条件的有效性。

参考文献:

[1] Dorato P. Short-time stability in linear time-varying systems[J]. Proceedings of the IRE International Convention, 1961, 4: 83-87.
 [2] Yin J, Khoo S, Man Z, et al. Finite-time stability and instability of stochastic nonlinear systems[J]. Automatica, 2011, 47(12): 2671-2677.
 [3] Guo Y, Yao Y, Wang S C, et al. Input-output finite-time stabilization of linear systems with finite-time boundedness[J]. ISA Transactions, 2014, 53(4): 977-982.
 [4] Lu X, Li X. Finite-time stability and controller design for non-linear impulsive sampled-data systems with applications[J]. ISA Transactions, 2017, 70: 30-36.

[5] Guo Y, Wang S C, Yao Y, et al. Evader maneuver on consideration of energy consumption in flight vehicle interception scenarios[J]. Aerospace Science and Technology, 2011, 15(7): 519-525.
 [6] Zhang Y Q, Liu C X, Mu X W. Robust finite-time stabilization of uncertain singular Markovian jump systems[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(10): 5109-5121.
 [7] Song Y, Wang Y, Krstic M. Time-varying feedback for stabilization in prescribed finite time[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29: 618-633.
 [8] Hong Y, Jiang Z P, Feng G. Finite-time input-to-state stability and applications to finite-time control[C]//Proceedings of the 17th World Congress. Seoul Korea: The International Federation of Automatic Control, 2008: 2466-2471.
 [9] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.
 [10] Wu J, Chen W S, Li J. Global finite-time adaptive stabilization for nonlinear systems with multiple unknown control directions[J]. Automatica, 2016, 69(7): 298-307.
 [11] Zhang S, Guo Y, Liu Z G, et al. Finite-time bounded stabilization for linear systems with finite-time H_2 -gain constraint[J]. IET Control Theory and Applications, 2020, 14: 1266-1275.
 [12] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances[J]. Automatica, 2001, 37(9): 1459-1463.
 [13] 沈艳军. 一类非线性系统有限时间稳定控制的新方法[J]. 山东大学学报, 2009, 44(7): 55-61.
 Shen Y J. A new approach for finite time stabilization for a class of nonlinear systems[J]. Journal of Shandong University, 2009, 44(7): 55-61.
 [14] 王梦柳. 线性时滞系统的有限时间稳定性分析[D]. 曲阜: 曲阜师范大学, 2016.
 Wang M L. Finite Time Stability Analysis of Linear Time-delay Systems[D]. Qufu: Qufu Normal University, 2016.
 [15] 赵欣. 有限时间控制及控制器设计[D]. 沈阳: 东北大学, 2010.
 Zhao X. Finite Time Control and Controller Design[D]. Shenyang: Northeastern University, 2010.
 [16] 杨洋. 基于事件触发异步切换系统的输入输出有限时间稳定[J]. 山东大学学报, 2019, 55(2): 118-126.
 Yang Y. Input-output finite time stability of asynchronous switched systems with event-triggered[J]. Journal of Shandong University, 2019, 55(2): 118-126.
 [17] 袁利. 基于有限时间稳定的航天器近距离交会控制[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2018.
 Yuan L. Spacecraft Close Rendezvous Control Based on Finite Time Stability[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2018.
 [18] Amato F, Ariola M, Cosentino C. Finite-time stability of linear time-varying systems: Analysis and controller design[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4): 1003-1008.
 [19] Maestrelli R, Coutinho D, de Souza C E. Input and output finite level quantized linear control systems: Stability analysis and quantizer design[J]. Journal of Control Automation and Electrical Systems, 2015, 26(2): 105-114.
 [20] Zhang Y, Liu C, Mu X, et al. Observer-based finite-time control

- of time-delayed jump systems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218(17): 9027-9032.
- [21] Feng L L, Zhao P. Finite-time stability and stabilization of switched linear time-varying systems with time-varying delay [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 17: 166-174.
- [22] Feng T, Wu B W, Wang Y E, et al. Input-output finite-time stability of switched singular continuous-time systems [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2021, 19(5): 1828-1835.

Finite-Time Stability Analysis of Time-Varying Linear System with Constant Delay

Chen Ke, Zhang Lixia, Sun Minhui

(School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: In this paper, we discuss the finite-time boundedness and input-output finite time stability problems of time-varying linear system with constant delay. By constructing Lyapunov functional and using the time-varying matrix inequality, sufficient conditions are given for the finite-time boundedness and the input-output finite-time stability of time-varying linear system with constant delay. At the same time, the corresponding state feedback controller is designed to make the closed-loop system finite-time bounded and input-output finite-time stable. Finally, a simulation example is provided to verify the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: linear time-delay system; input-output finite-time stability; time-varying matrix inequalities; Lyapunov function

AMS Subject Classifications: 34D99; 34H05

责任编辑 朱宝象