

小阻尼时变双项位势 Duffing 型方程的调和解*

魏亚男

(中国海洋大学数学科学学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 本文利用弯曲扭转拓扑映射的不动点定理,证明了如下结果:若 $a(t), b(t)$ 是连续的 T -周期函数,则小阻尼 Duffing 型方程 $x'' + \epsilon x' + a(t)f(x) + b(t)g(x) = 0$ 至少存在四个调和解。

关键词: 小阻尼; 双项位势; Duffing 型方程; 周期解; 弯曲扭转定理

中图法分类号: O175.12

文献标志码: A

文章编号: 1672-5174(2023)04-106-05

DOI: 10.16441/j.cnki.hdxh.20210018

引用格式: 魏亚男. 小阻尼时变双项位势 Duffing 型方程的调和解[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版), 2023, 53(4): 106-110.

Wei Ya'nan. Research on harmonic solutions for the Duffing-type equations with small damping and two-term time dependent potential[J]. Periodical of Ocean University of China, 2023, 53(4): 106-110.

著名的 Poincaré-Birkhoff 定理和它的推广形式是研究平面保守系统周期解问题的有力工具^[1-7]。但是,平面耗散系统对应的 Poincaré 映射一般不满足保面积条件,因此, Poincaré-Birkhoff 定理通常不能用来研究其周期解问题。针对这种情况,丁同仁^[8-9]建立了不需要保面积条件,代之以某种弯曲条件的新的解析扭转映射不动点定理,并利用它证明了耗散 Duffing 方程

$$x'' + \epsilon x' + (ax + bx^3) = Ep(t)$$

至少有两个不同的 k 阶次调和解,条件是只要 $\epsilon > 0$ 和 $E > 0$ 充分小。

马如云等^[10]利用集连通理论,给出了非保面积的扭转映射至少有两个不动点的一个新定理。Pascoletti 和 Zanolin^[11]通过拓扑方法推广了丁同仁^[8]的扭转弯曲定理,并得到了一些新的带有弯曲条件的不动点定理。作为应用,作者证明了如下结果:当 $\epsilon > 0$ 充分小, $w(t)$ 为非负的周期函数时,方程

$$x'' + \epsilon x' + (1 + w(t))f(x) = 0$$

至少有四个初值在一星形环域中的次调和解。

本文的目的是拓展弯曲扭转映射定理的应用范围,利用文献[11]的一个抽象结论,即下文中的引理 4,来研究双项位势 Duffing 方程

$$x'' + \epsilon x' + a(t)f(x) + b(t)g(x) = 0 \quad (1)$$

的周期解问题,其中 $a(t), b(t)$ 是连续的 T -周期函数。

1 准备

假设 $a, b: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是 T -周期连续函数。对于以 T

为周期的周期函数 $\alpha(t)$,记其平均值 $\bar{\alpha} := \frac{1}{T} \int_0^T \alpha(t) dt$,

偏差 $\hat{\alpha}(t) := \alpha(t) - \bar{\alpha}$,以及 L^1 范数 $\alpha_1 := \int_0^T |\alpha(t)| dt$ 。始

终假设 $\bar{a}, \bar{b} > 0$, $f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$ 满足局部 Lipschitz 条件,其中 $I = (A, B)$ ($-\infty < A < 0 < B < \infty$) 是一个开区间。引入假设条件:

(H₀) $f(0) = 0, g(0) = 0$,且存在常数 $N^* > 0$ 使得

$$0 < \frac{f(x)}{x}, \frac{g(x)}{x} \leq N^*, \quad \forall x \in I \setminus \{0\}.$$

(H₁) 存在常数 $\delta_0 > 0$,满足

$$\hat{a}(t) = \hat{b}(t) = 0, \quad t \in [0, T - \delta_0],$$

$$\hat{a}(t) \geq 0, \hat{b}(t) \geq 0, \hat{a}^2(t) + \hat{b}^2(t) \neq 0, t \in (T - \delta_0, T).$$

(H₂) 存在常数 $\delta_0 > 0$,满足

$$\hat{a}(t) = \hat{b}(t) = 0, \quad t \in [0, T - \delta_0],$$

$$\hat{a}(t) \leq 0, \hat{b}(t) \leq 0, \hat{a}^2(t) + \hat{b}^2(t) \neq 0, t \in (T - \delta_0,$$

$T)$ 。当 $\epsilon = 0$ 时,方程(1)化为

$$x'' + a(t)f(x) + b(t)g(x) = 0. \quad (2)$$

方程(2)可写成

$$x'' + \bar{a}f(x) + \bar{b}g(x) + \hat{a}(t)f(x) + \hat{b}(t)g(x) = 0, \quad (3)$$

其等价系统为

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\bar{a}f(x) - \bar{b}g(x) - \hat{a}(t)f(x) - \hat{b}(t)g(x). \end{cases} \quad (4)$$

* 基金项目:国家自然科学基金项目(11971059)资助

Supported by the National Natural Science Foundation of China(11971059)

收稿日期:2021-01-15; 修订日期:2021-03-16

作者简介:魏亚男(1997—),女,硕士生,研究方向为常微分方程与动力系统。E-mail:yananwei@aliyun.com

考虑辅助方程

$$x'' + \bar{a}f(x) + \bar{b}g(x) = 0 \quad (5)$$

及其等价系统

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\bar{a}f(x) - \bar{b}g(x). \end{cases} \quad (6)$$

我们将系统(4)看作是系统(6)的扰动系统。

令 $\phi(\cdot) = \phi(\cdot, z)$ 表示系统(6)满足初值条件 $\phi(0) = z$ 的解。计算得系统(6)的首次积分为

$$E(x, y) := \frac{1}{2}y^2 + \bar{a}F(x) + \bar{b}G(x) = c, \quad (7)$$

其中, $F(x) = \int_0^x f(s)ds, G(x) = \int_0^x g(s)ds, c$ 是常数。

由文献[9](251 页)可知:若条件 (H_0) 成立,则存在常数 $C > 0$ 使得,当 $0 < c < C$ 时,系统(6)的轨道 $E^c = \{(x, y) | E(x, y) = c\}$ 是闭曲线,且是关于原点 O 的星形线。

令 $\tau(c)$ 表示 E^c 的最小正周期,则 $\tau(c)$ 是关于 c 的连续函数(参见[11])。引入假设:

(H_3) 存在常数 $c_1, c_2: 0 < c_1 < c_2 < C$ 使得,对于任意常数 $\varepsilon^* > 0$,有 $0 < c_2 - c_1 < \varepsilon^*$,并且 T 介于 $\tau(c_1)$ 和 $\tau(c_2)$ 之间。

令 $A = \{(x, y) \in I \times \mathbf{R}: c_1 \leq E(x, y) \leq c_2\}$,则 A 是平面上的一个环域,其内外边界分别为 E^{c_1} 和 E^{c_2} 。

令 L_θ 表示所有极角为 θ 的点的集合,则 L_θ 与 E^c 有且只有一个交点。因此,可以引入一个与极坐标投影映射等价的覆盖映射 $\Xi: A \rightarrow \mathbf{R}^2$,使得

$$\Xi(x, y) = (\theta, \xi), \quad (x, y) \in A,$$

式中: θ 是通常意义下的极角, $\xi = E(x, y)$ 。

现在我们可以叙述本文的主要结果。

定理 1 假设条件 $(H_0), (H_3)$ 成立,且条件 (H_1) 或 (H_2) 成立,则存在充分小的正常数 δ ,使得当 $\max\{\|\hat{a}\|_1, \|\hat{b}\|_1, \delta_0\} < \delta$ 时,公式(2)至少有 4 个初值在 A 中的 T -周期解。进一步,该结论对带阻尼的公式(1)也成立,只要 $\varepsilon > 0$ 充分小。

将条件 $(H_1), (H_2)$ 做一些弱化。假设存在正常数 \tilde{a}, \tilde{b} 使得 $\tilde{a}(t) := a(t) - \tilde{a}, \tilde{b}(t) := b(t) - \tilde{b}$ 满足以下两个条件之一:

$(H_1)^*$ 存在常数 $\delta_0 > 0$, 满足

$$\tilde{a}(t) = \tilde{b}(t) = 0, \quad t \in [0, T - \delta_0],$$

$$\tilde{a}(t) \geq 0, \tilde{b}(t) \geq 0, \tilde{a}^2(t) + \tilde{b}^2(t) \neq 0, t \in (T - \delta_0, T);$$

$(H_2)^*$ 存在常数 $\delta_0 > 0$, 满足

$$\tilde{a}(t) = \tilde{b}(t) = 0, \quad t \in [0, T - \delta_0],$$

$$\tilde{a}(t) \leq 0, \tilde{b}(t) \leq 0, \tilde{a}^2(t) + \tilde{b}^2(t) \neq 0, t \in (T - \delta_0, T).$$

我们可以得到稍微宽泛的结果。

定理 2 假设条件 $(H_0), (H_3)$ 成立,且存在正常数 \tilde{a}, \tilde{b} ,

使得条件 $(H_1)^*$ 或 $(H_2)^*$ 成立,则存在充分小的正常数 δ ,使得当 $\max\{\|\tilde{a}\|_1, \|\tilde{b}\|_1, \delta_0\} < \delta$ 时,公式(2)至少有 4 个初值在 A 中的 T -周期解。进一步,该结论对带阻尼的公式(1)也成立,只要 $\varepsilon > 0$ 充分小。

注 1 因为条件 (H_1) 或 (H_2) ($(H_1)^*$ 或 $(H_2)^*$) 不排除 $a(t)$ 和 $b(t)$ 在一个周期内变号,因此上述两定理适用范围比文献[11]中的相应结论更广泛。我们将在本文最后举例说明这一点。

2 主要结果的证明

设 $X \subset \mathbf{R}^2$ 是一个拓扑环, $h: X \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 是一个连续映射,记 X_i 和 X_o 分别是 X 的内外边界,所围的区域分别是 $\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_o$,且原点 $O \in \mathfrak{D}_i$ 。令

$$\Pi: (\varphi, r) \rightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

为标准覆盖映射,则由覆盖投射理论^[12]可知, h 存在一个连续的提升映射

$$\tilde{h}: (\varphi, r) \rightarrow (\varphi + g^*(\varphi, r), r^*(\varphi, r)),$$

满足 $h \circ \Pi = \Pi \circ \tilde{h}$,其中 $g^*(\varphi, r), r^*(\varphi, r)$ 是定义在 $\Pi^{-1}(X)$ 上的连续函数,且关于 φ 是 2π -周期的。

下面的引理来自文献[11]中的推论 2.10,它是我们证明主要定理的基本工具。

引理 1 假设

(A_1) h 的提升映射 \tilde{h} , 满足扭转条件:

$$\begin{cases} g^*(\varphi, r) > 2j\pi (< 2j\pi), (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in X_i, \\ g^*(\varphi, r) < 2j\pi (> 2j\pi), (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in X_o, \end{cases}$$

式中 j 是给定的整数。

(A_2) X 中存在 $2k$ 个连接 X_i 和 X_o 且互不相交的曲线,分别用 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots, \Gamma_{2k}, \Gamma_{2k+1} = \Gamma_1$ 进行标记,满足

$$\begin{cases} Y(z) < 0, z \in \Gamma_{2n-1}, n=1, 2, \dots, k; \\ Y(z) > 0, z \in \Gamma_{2n}, n=1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

式中 $Y(z) = r^*(\varphi, r) - r$ 。则映射 h 在 X 的内部 $\text{int}X$ 至少有 $2k$ 个不同的不动点。

注 2 由文献[11]中的论述可知,我们可以将 Y 表示为 $Y(z) = E(h(z)) - E(z)$ 。

下面我们进行定理 1 的证明。

证明 我们不妨假设 $\tau(c_1) < T < \tau(c_2)$ 。由于 $\tau(c)$ 连续,因此系统(6)至少有一个 T -周期解 $\varphi(t) = (x(t), y(t))$,满足 $E(x(0), y(0)) = \hat{c}, \tau(\hat{c}) = T$ 。

令 $\psi_{\tilde{a}, \tilde{b}}(\cdot, z) = (\psi_1(\cdot, z), \psi_2(\cdot, z))$ 表示系统(4)满足初值条件 $\psi_{\tilde{a}, \tilde{b}}(0, z) = z$ 的解。由于 $a(t), b(t)$ 为连续周期函数,则存在常数 $M_0 > 0$,使得 $|a(t)| \leq M_0, |b(t)| \leq M_0$ 。再结合文献[13]中定理 2.4 可知,在条件 (H_0) 成立的情况下,系统(4)的解 $\psi_{\tilde{a}, \tilde{b}}(\cdot, z)$ 在整个 t 轴上存在。因此,可以将系统(4)的 Poincaré 映

射 $\Psi_{\hat{a},\hat{b}}:D \rightarrow \mathbf{R}^2$ 定义为 $\Psi_{\hat{a},\hat{b}}(z) := \psi_{\hat{a},\hat{b}}(T, z)$, 其中,

$$D = \{(x, y) \in I \times \mathbf{R} : E(x, y) \leq c_2\}.$$

因 $\Psi_{\hat{a},\hat{b}}(0) = 0$, 由解的存在唯一性可知

$$\psi_{\hat{a},\hat{b}}(t, z) \neq 0, \quad \forall t \in [0, T], z \in A.$$

定义函数 $\vartheta(t, z)$ 满足

$$\psi_{\hat{a},\hat{b}}(t, z) = \|\psi_{\hat{a},\hat{b}}(t, z)\| (\cos(\vartheta(t, z)), \sin(\vartheta(t, z))).$$

$$\Theta_{\hat{a},\hat{b}}(\theta, \xi) = \int_0^T \frac{[\bar{a}f(\psi_1(t, z)) + \bar{b}g(\psi_1(t, z)) + \hat{a}(t)f(\psi_1(t, z)) + \hat{b}(t)g(\psi_1(t, z))] \psi_1(t, z) + \psi_2(t, z)^2}{\|\psi_{\hat{a},\hat{b}}(t, z)\|^2} dt. \tag{9}$$

显然, 在 L^1 拓扑下映射 $\Theta_{\hat{a},\hat{b}}$ 关于 \hat{a}, \hat{b} 是连续的, 且

$$\Theta_{0,0}(\theta, \xi) = -2\pi, \quad (\theta, \xi) \in E^c. \tag{10}$$

由于系统(6)从 E^c 出发的解绕原点顺时针旋转, 且 $\tau(c_1) < T < \tau(c_2)$, 故

$$\begin{cases} \Theta_{0,0}(\theta, \xi) < -2\pi, & (\theta, \xi) \in E^{c_1}, \\ \Theta_{0,0}(\theta, \xi) > -2\pi, & (\theta, \xi) \in E^{c_2}. \end{cases} \tag{11}$$

因此, 结合公式(9)可得, 存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $\max\{\|\hat{a}\|_1, \|\hat{b}\|_1\} < \delta$ 时, 有

$$\begin{cases} \Theta_{\hat{a},\hat{b}}(\theta, \xi) < -2\pi, & (\theta, \xi) \in E^{c_1}, \\ \Theta_{\hat{a},\hat{b}}(\theta, \xi) > -2\pi, & (\theta, \xi) \in E^{c_2}. \end{cases} \tag{12}$$

即 $\Psi_{\hat{a},\hat{b}}$ 满足扭转条件。

下面证明 A 中存在 4 条连接 E^{c_1} 和 E^{c_2} 的曲线 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, 且满足引理 1 中的条件 (A_2) 。

假设条件 (H_1) 成立 (条件 (H_2) 成立时可类似证明)。令

$$Y_{\hat{a},\hat{b}}(z) = E(\Psi_{\hat{a},\hat{b}}(z)) - E(z), \quad \forall z \in A.$$

根据 $E(x, y)$ 的定义, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\psi_{\hat{a},\hat{b}}(t, z)) &= \frac{d}{dt} E(\psi_1(t, z), \psi_2(t, z)) = \\ &\psi_2(t, z)\psi_2'(t, z) + \bar{a}f(\psi_1(t, z))\psi_1'(t, z) + \\ &\bar{b}g(\psi_1(t, z))\psi_1'(t, z) = \\ &\psi_2(t, z)[- \bar{a}f(\psi_1(t, z)) - \bar{b}g(\psi_1(t, z)) - \\ &\hat{a}(t)f(\psi_1(t, z)) - \hat{b}(t)g(\psi_1(t, z))] + \\ &\bar{a}f(\psi_1(t, z))\psi_2(t, z) + \bar{b}g(\psi_1(t, z))\psi_2(t, z) = \\ &\psi_2(t, z)[- \hat{a}(t)f(\psi_1(t, z)) - \hat{b}(t)g(\psi_1(t, z))]. \end{aligned} \tag{13}$$

由条件 $(H_0), (H_1)$ 可知, 对任意 $t \in (T - \delta_0, T)$, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\psi_{\hat{a},\hat{b}}(t, z)) &> 0, \quad \psi_{\hat{a},\hat{b}}(t, z) \in \mathfrak{D}_1, \\ \frac{d}{dt} E(\psi_{\hat{a},\hat{b}}(t, z)) &< 0, \quad \psi_{\hat{a},\hat{b}}(t, z) \in \mathfrak{D}_2, \end{aligned} \tag{14}$$

式中: $\mathfrak{D}_1 = \{(x, y) : xy < 0\}, \mathfrak{D}_2 = \{(x, y) : xy > 0\}$ 。

令 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, Γ_1 表示 $L_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ 和 A 的交线, 则 Γ_1 在

第 I 象限。如图 1 所示, 取 $z_0 = \Gamma_1 \cap E^c$, 由于 $\tau(\hat{c}) = T$, 则当 δ_0 充分小时, $\varphi(t, z_0) (t \in (T - \delta_0, T))$ 位于第 I 象限。由条件 (H_3) 可知, $\tau(c_1), \tau(c_2)$ 与 T 充分接近,

令 $\tilde{\Psi}_{\hat{a},\hat{b}}$ 表示 $\Psi_{\hat{a},\hat{b}}$ 的提升映射, 设

$$\tilde{\Psi}_{\hat{a},\hat{b}}(\theta, \xi) = (\theta + \Theta_{\hat{a},\hat{b}}(\theta, \xi), \xi^*),$$

式中: θ 是通常的极角; $\xi = E(x, y)$ 。

对于 $z = (\xi \cos \theta, \xi \sin \theta)$, 有

$$\xi^* = \|\Psi_{\hat{a},\hat{b}}(z)\|, \tag{8}$$

从而由曲线的紧性可知, 当 δ_0 充分小时, 对于任意 $z \in \Gamma_1$, 有 $\varphi(t, z) (t \in (T - \delta_0, T))$ 在第 I 象限。因此, 当 $\max\{\|\hat{a}\|_1, \|\hat{b}\|_1, \delta_0\}$ 充分小时, 对于任意 $z \in \Gamma_1$, $\psi_{\hat{a},\hat{b}}(t, z) (t \in (T - \delta_0, T))$ 也位于第 I 象限。再结合公式(14), 可知 $E(\psi_{\hat{a},\hat{b}}(t, z))$ 在 $(T - \delta_0, T)$ 上单调递减, 因此, 对于任意 $z \in \Gamma_1$ 有

$$E(\Psi_{\hat{a},\hat{b}}(z)) = E(\psi_{\hat{a},\hat{b}}(T, z)) < E(\psi_{\hat{a},\hat{b}}(T - \delta_0, z)).$$

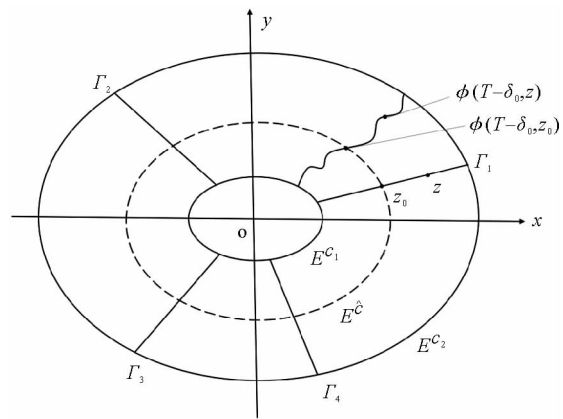


图 1 公式(6)的周期轨迹

Fig.1 The periodic orbits of the formula (6)

由条件 (H_1) 可知, 对于 $t \in [0, T - \delta_0]$, 系统(4)和(6)的解重合, 从而 $\psi_{\hat{a},\hat{b}}(T - \delta_0, z) = \varphi(T - \delta_0, z)$ 。因此, 对于任意 $z \in \Gamma_1$ 有

$$E(\psi_{\hat{a},\hat{b}}(T - \delta_0, z)) = E(\varphi(T - \delta_0, z)) = E(z),$$

从而

$$E(\Psi_{\hat{a},\hat{b}}(z)) - E(z) < 0, \quad \forall z \in \Gamma_1. \tag{15}$$

利用类似的方法, 我们还可以得到

$$\begin{aligned} E(\Psi_{\hat{a},\hat{b}}(z)) - E(z) &> 0, \quad z \in \Gamma_2 := L_{\pi-\alpha} \cap A, \\ E(\Psi_{\hat{a},\hat{b}}(z)) - E(z) &< 0, \quad z \in \Gamma_3 := L_{\frac{3}{2}\pi-\alpha} \cap A, \\ E(\Psi_{\hat{a},\hat{b}}(z)) - E(z) &> 0, \quad z \in \Gamma_4 := L_{2\pi-\alpha} \cap A, \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} Y_{\hat{a},\hat{b}}(z) < 0, & z \in \Gamma_1, \Gamma_3, \\ Y_{\hat{a},\hat{b}}(z) > 0, & z \in \Gamma_2, \Gamma_4. \end{cases} \tag{16}$$

因此, 由引理 1 可知, 存在常数 $\delta > 0$ 使得当 $\max\{\|\hat{a}\|_1, \|\hat{b}\|_1, \delta_0\} < \delta$ 时, $\Psi_{\hat{a},\hat{b}}$ 在 A 中至少有 4 个不动点。于是公式(2)至少有 4 个初值点在 A 中的 T -周

期解。此外,对于公式(1),当 ϵ 充分小时,可以得到相同的结论。事实上,利用类似于 $\Theta_{\tilde{a},\tilde{b}}(\theta,\xi)$ 和 $\Upsilon_{\tilde{a},\tilde{b}}(z)$ 的定义方法,我们可以定义 $\Theta_{\tilde{a},\tilde{b}}(\epsilon,\theta,\xi)$ 和 $\Upsilon_{\tilde{a},\tilde{b}}(\epsilon,z)$, 满足

$$\Theta_{\tilde{a},\tilde{b}}(0,\theta,\xi)=\Theta_{\tilde{a},\tilde{b}}(\theta,\xi), \Upsilon_{\tilde{a},\tilde{b}}(0,z)=\Upsilon_{\tilde{a},\tilde{b}}(z)。$$

由 $\Theta_{\tilde{a},\tilde{b}}(\epsilon,\theta,\xi)$ 和 $\Upsilon_{\tilde{a},\tilde{b}}(\epsilon,z)$ 的连续性可得,当 $\epsilon>0$ 且充分小时,有

$$\begin{cases} \Theta_{\tilde{a},\tilde{b}}(\epsilon,\theta,\xi)<-2\pi, (\theta,\xi)\in E^{c_1}, \\ \Theta_{\tilde{a},\tilde{b}}(\epsilon,\theta,\xi)>-2\pi, (\theta,\xi)\in E^{c_2}, \end{cases}$$

且

$$\begin{cases} Y_{\tilde{a},\tilde{b}}(\epsilon,z)<0, z\in\Gamma_1,\Gamma_3, \\ Y_{\tilde{a},\tilde{b}}(\epsilon,z)>0, z\in\Gamma_2,\Gamma_4. \end{cases}$$

因此公式(1)也至少有 4 个初值在 A 中的 T -周期解。

$$a(t)=\begin{cases} 1, & t\in[0,\sqrt{2}\pi-\frac{1}{n}], \\ 4(n^2+n)t^2+(n+1)(4-8\sqrt{2}n\pi)t+(n+1)(8n\pi^2-4\sqrt{2}\pi)+1, & t\in(\sqrt{2}\pi-\frac{1}{n},\sqrt{2}\pi), \end{cases}$$

$$b(t)=\begin{cases} 1, & t\in[0,\sqrt{2}\pi-\frac{1}{n}], \\ -2(n+1)t+2(\sqrt{2}\pi-\frac{1}{n})(n+1)+1, & t\in(\sqrt{2}\pi-\frac{1}{n},\sqrt{2}\pi-\frac{1}{2n}], \\ 2(n+1)t-2\sqrt{2}\pi(n+1)+1, & t\in(\sqrt{2}\pi-\frac{1}{2n},\sqrt{2}\pi), \end{cases}$$

取 $\delta_0=\frac{1}{n}, \tilde{a}=\tilde{b}=1$ 。显然,

$$\tilde{a}(t)=a(t)-\tilde{a}=a(t)-1=0, t\in[0, T-\delta_0],$$

$$\tilde{b}(t)=b(t)-\tilde{b}=b(t)-1=0, t\in[0, T-\delta_0].$$

从而,条件 $(H_2)^*$ 成立。

计算可得

$$\|\tilde{a}\|_1=\int_0^{\sqrt{2}\pi}|a(t)-\tilde{a}|dt=$$

$$\int_{\sqrt{2}\pi-\delta_0}^{\sqrt{2}\pi}(\tilde{a}-a(t))dt=\tilde{a}\delta_0+\int_{\sqrt{2}\pi-\delta_0}^{\sqrt{2}\pi}(-a(t))dt=$$

$$\frac{4}{3}(n+1)(-6\pi^2+3\sqrt{2}\pi\delta_0-\delta_0^2)+(n+1)(2\delta_0^2-4\sqrt{2}n\pi\delta_0^2+8n\pi^2\delta_0)=\frac{2}{3n^2}(n+1)。$$

$$\|\tilde{b}\|_1=\int_0^{\sqrt{2}\pi}|b(t)-\tilde{b}|dt=$$

$$\int_{\sqrt{2}\pi-\delta_0}^{\sqrt{2}\pi}(\tilde{b}-b(t))dt=\tilde{b}\delta_0+\int_{\sqrt{2}\pi-\delta_0}^{\sqrt{2}\pi}(-b(t))dt=$$

$$\tilde{b}\delta_0+\int_{\sqrt{2}\pi-\frac{1}{2n}}^{\sqrt{2}\pi-\frac{1}{n}}[-2(n+1)t+2(\sqrt{2}\pi-\frac{1}{n})(n+1)+1]dt+$$

$$\int_{\sqrt{2}\pi-\frac{1}{2n}}^{\sqrt{2}\pi} [2(n+1)t-2\sqrt{2}\pi(n+1)+1]dt=$$

$$(n+1)(\frac{3}{4n^2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{n})+(n+1)\frac{1}{n}(\sqrt{2}\pi-\frac{1}{n})-$$

$$\frac{n+1}{4n^2}+\frac{2}{n}=\frac{3}{2n}-\frac{1}{2n^2}。$$

因此, $\lim_{n\rightarrow\infty}\|\tilde{a}\|_1=\lim_{n\rightarrow\infty}\|\tilde{b}\|_1=0$ 。

$f, g: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ 定义如下: $f(0)=g(0)=0$,

定理 1 证毕。

注 3 定理 2 的证明类似于定理 1, 只需要将证明过程中的 \bar{a}, \bar{b} 分别换成 \tilde{a}, \tilde{b} 即可。

3 案例分析

下面举例说明定理 2 的有效性。

例 1 考虑方程

$$x''+\frac{1}{n}x'+a(t)f(x)+b(t)g(x)=0, \quad (17)$$

式中: n 是正整数; $a(t), b(t)$ 是 $\sqrt{2}\pi$ -周期函数, 且 $a(t), b(t)$ 在 $[0, \sqrt{2}\pi)$ 上的定义如下:

$f(x), g(x)$ 为奇函数, 且

$$f(x)=x(\frac{4}{5}\cos(\ln x)+1), x\in(0, 1),$$

$$g(x)=x(1-\frac{2}{5}\sin(\ln x)), x\in(0, 1)。$$

则

$$f'(x)=\frac{4}{5}\cos(\ln x)-\frac{4}{5}\sin(\ln x)+1, x\in(0, 1),$$

$$g'(x)=1-\frac{2}{5}\sin(\ln x)-\frac{2}{5}\cos(\ln x), x\in(0, 1)。$$

从而, $f'(x), g'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有界。因此, $f(x), g(x)$ 满足局部 Lipschitz 条件。且容易验证 $f(x), g(x)$ 满足条件 (H_0) 。

当 $x\in(0, 1)$ 时, 方程 $x''+\tilde{a}f(x)+\tilde{b}g(x)=0$ 的首次积分为

$$E(x, y)=\frac{1}{2}y^2+H(x)=c,$$

其中,

$$H(x)=x^2(1+\frac{2}{5}\cos(\ln x))。$$

令 $Q(x)=1+\frac{2}{5}\cos(\ln x)$, 设 $h_c=h(c)$ 满足 $H(h_c)=c$, 则有

$$\tau(c)=2\sqrt{2}\int_0^{h_c}\frac{du}{\sqrt{c-H(u)}}=$$

$$2\sqrt{2}\int_0^1\frac{h_c d\sigma}{\sqrt{H(h_c)-H(h_c\sigma)}}=$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{Q(h_c)}} \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2 Q(h_c\sigma)/Q(h_c)}} \tag{18}$$

下面证明 $\tau(c)$ 满足条件。

由于 $H'(x) = \tilde{a}f(x) + \tilde{b}g(x)$, 结合条件 (H_0) 可知, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $H'(x) > 0$, 即 $H(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增。令

$$c_1^* = H(e^{-3\pi}), c_2^* = H(e^{-2\pi}).$$

由于

$$0 < e^{-3\pi} < e^{-2\pi} < 1,$$

则 $0 < c_1^* < c_2^* < C := H(1^-) = \frac{7}{5}$ 。根据公式(18)可得

$$\tau(c_1^*) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{Q(e^{-3\pi})}} \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2 Q(e^{-3\pi}\sigma)/Q(e^{-3\pi})}} > \sqrt{2}\pi,$$

$$\tau(c_2^*) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{Q(e^{-2\pi})}} \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2 Q(e^{-2\pi}\sigma)/Q(e^{-2\pi})}} < \sqrt{2}\pi.$$

因此, 由函数 $\tau(c)$ 的连续性可知, 存在正常数 $c_1, c_2, c^* : c_1^* < c_1 < c^* < c_2 < c_2^*$, 满足对于任意常数 $\epsilon^* > 0$, 有 $0 < c_2 - c_1 < \epsilon^*$, 且 $\tau(c^*) = \sqrt{2}\pi$ 介于 $\tau(c_1)$ 与 $\tau(c_2)$ 之间。从而条件 (H_3) 成立。

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{\|\bar{a}\|_1, \|\bar{b}\|_1, \delta_0\} = 0$, 故由定理 2 可知, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 公式(1)至少有 4 个 $\sqrt{2}\pi$ -周期解。

参考文献:

[1] Ding T R. An infinite class of periodic solutions of periodically perturbed Duffing equations at resonance [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1982, 86(1): 47-54.
 [2] Ding T R, Ding W Y. Resonance problem for a class of Duffing's equations [J]. Chinese Annals of Mathematics, 1985, 6(4): 427-432.

[3] Hao D Y, Ma S W. Semilinear Duffing equations crossing resonance points [J]. Journal of Differential Equations, 1997, 133(1): 98-116.
 [4] Jacobowitz H. Periodic solutions of $x'' + f(x, t) = 0$ via the Poincaré-Birkhoff theorem [J]. Journal of Differential Equations, 1976, 20(1): 37-52.
 [5] Leach D E. On Poincaré's perturbation theorem and a theorem of W. S. Loud [J]. Journal of Differential Equations, 1970, 7(1): 34-53.
 [6] Mawhin J. Contractive mappings and periodically perturbed conservative systems [J]. Archivum Mathematicum, 1976, 12(2): 67-73.
 [7] Wang Z H. Periodic solutions of the second order differential equations with Lipschitzian condition [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1998, 126(8): 2267-2276.
 [8] 丁同仁. 扭转弯曲定理和它的一个应用 [J]. 数学进展, 2012, 41(1): 31-44.
 Ding T R. The twist-bend theorem with an application [J]. Advances in Mathematics, 2012, 41(1): 31-44.
 [9] Ding T R. Approaches to the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2007.
 [10] 马如云, 伏升茂, 李战存. 扭转映射的一个不动点定理 [J]. 数学研究与评论, 1996, 16(3): 452-454.
 Ma R Y, Fu S M, Li Z C. A fixed points theorem for twist maps [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 1996, 16(3): 452-454.
 [11] Pascoletti A, Zanolin F. A topological approach to bend-twist maps with applications [J]. International Journal of Dynamical Systems and Differential Equation, 2011, 2011: 1-20.
 [12] João B P. Lectures on algebraic topology [J]. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, 1971, 2(1): 63-66.
 [13] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶. 微分方程定性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1985.
 Zhang Z F, Ding T R, Huang W Z. Qualitative Theory of the Differential Equations [M]. Beijing: Science Press, 1985.

Research on Harmonic Solutions for the Duffing-Type Equations with Small Damping and Two-Term Time Dependent Potential

Wei Ya'nan

(School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: In this article, by using fixed the point theorems for topological bend-twist maps, under relatively some natural conditions, we prove that for the small damping Duffing-type equation $x'' + \epsilon x' + a(t)f(x) + b(t)g(x) = 0$, there are at least four harmonic solutions starting from a starlike annulus on the phase plane. Here $a(t)$ and $b(t)$ are continuous T -periodic functions.

Key words: small damping; two-term potential; Duffing-type equations; periodic solutions; bend-twist theorem

AMS Subject Classifications: 34C25

责任编辑 朱宝象