第 55 卷 增刊Ⅰ
2025 年 7 月

中 国 海 洋 大 学 学 报
PERIODICAL OF OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

55(Sup.Ⅰ):118~124
July, 2025

一类具有变指数源项的 Petrovsky 方程解的爆破性质*

陈 静[1],王 建[1**],廖梦兰[2]

(1. 中国海洋大学数学科学学院,山东 青岛 266100;2. 厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005)

摘 要: 本文研究了一类具有变指数源项的 Petrovsky 方程解的爆破性质。在初始能量有界的情况下,作者运用能量泛函、构造辅助函数等方法,证明了解在有限时刻发生爆破,并得到了爆破时间的上下界估计。

关键词: 解的爆破;变指数源项;爆破时间;上下界

中图法分类号: O29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-5174(2025)07Ⅱ-118-07

DOI: 10.16441/j.cnki.hdxb.20220378

引用格式: 陈静,王建,廖梦兰. 一类具有变指数源项的 Petrovsky 方程解的爆破性质[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版),2025,55(增Ⅰ):118-124.

Chen Jing, Wang Jian, Liao Menglan. The blow-up properties of solutions to a class of petrovsky equations with variable exponential source terms[J]. Periodical of Ocean University of China, 2025, 55(Sup.Ⅰ): 118-124.

0 引言

本文考虑一类具有变指数源项的 Petrovsky 方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2 u-M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u+|u_t|^{m(x)-2}u_t=|u|^{p(x)-2}u, \\ \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ u(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial v}=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),\ x\in\Omega \end{cases}。\tag{1}$$

其中 Ω 在 $\mathbf{R}^N(N\geqslant 1)$ 中的光滑有界区域,v 是 $\partial\Omega$ 的单位向外法向量,$u_0(x)\in H_0^2(\Omega)$,$u_1(x)\in L^2(\Omega)$,$M(s)=a+bs^\gamma$ 是正的 C^1 类函数,$a>0,b>0,\gamma\geqslant 1$,幂指数 $m(x)$ 和 $p(x)$ 是 Ω 上的可测函数,满足对任意 $x\in\Omega$,有

$$m(x)\in[m^-,m^+]\subset(1,\infty),$$
$$p(x)\in[p^-,p^+]\subset(1,\infty),$$

且同时满足 log-Hölder 连续条件,即对 $A>0$ 和任意 $0<\delta<1$,当任意 $x,y\in\Omega$ 且 $|x-y|<\delta$ 时,式子

$$|q(x)-q(y)|\leqslant-\frac{A}{\log|x-y|}$$

成立,其中

$$m^-:=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega}m(x),m^+:=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}m(x),$$
$$p^-:=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega}p(x),p^+:=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}p(x)。$$

众所周知,Petrovsky 方程可以用来描述物理、工程、化学、材料科学和其他科学中的各种问题。因此,许多学者对于 Petrovsky 方程的解在何种情况下爆破进行了深入的研究。

文献[1]研究了具有非线性阻尼项的半线性 Petrovsky 方程

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2 u+au_t|u_t|^{m-2}=bu|u|^{p-2},(x,t)\in\Omega\times(0,\infty) \\ u(x,t)=\partial_\nu u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty) \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\varphi(x),x\in\Omega \end{cases},$$

其中 a,b 为正常数。作者证明了其局部弱解的存在性,并证明了当初始能量为负且 $p>m$ 时,解在有限时间内爆破,当 $m\geqslant p$ 时,解是全局解。文献[2]推广了上述结果,并证明了在某些条件下,不论 m 和 p 之间的大小关系,解都是全局的,他们还证明了当 $p>m$ 且初始能量非负时,局部解在有限时间内爆破,并给出了能量函数的衰减估计和解的存在时间的上下界估计。

文献[3-5]研究了以下具有线性阻尼项的超线性双曲方程

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u-\omega\Delta u_t+\mu u_t=|u|^{p-2}u,(x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega \end{cases},$$

其中 $\omega\geqslant 0,\mu>-\omega\lambda_1$,$\lambda_1$ 是 $-\Delta$ 算子在齐次 Dirichlet 边界条件下的第一特征值。作者通过采用带 $\varepsilon>0$ 的 Young 不等式来处理嵌入不等式不成立的情况,并建

* 基金项目:国家自然科学基金项目(11671188)资助
Supported by the National Natural Science Foundation of China(11671188)

收稿日期:2023-02-05;修订日期:2023-04-06

作者简介:陈 静(1998—),女,硕士生,研究方向:偏微分方程。E-mail:oucchenjing@163.com

** 通信作者:王 建,男,博士,教授,研究方向:偏微分方程。E-mail:pdejwang@ouc.edu.cn

立微分不等式，证明了爆破结果并得到了爆破时间的下界。本文中也将借鉴此方法来得到问题(1)的爆破时间的下界。

随着数学理论的迅速发展，具有变指数源项的非线性偏微分方程的研究越来越受到重视。文献[6]在以上方程的基础上，考虑了以下具有变指数源项的二阶 Petrovsky 方程：

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+a|u_t|^{m(x)-2}u_t=b|u|^{p(x)-2}u, \\ \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega \end{cases},$$

其中 a,b 为正常数。在适当的假设下，利用 Faedo-Galerkin 方法证明了弱解的存在唯一性，并证明了解在有限时刻发生爆破。

文献[7]考虑了以下具有变指数源项的四阶 Petrovsky 方程

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2 u-M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u+|u_t|^{p(x)-2}u_t= \\ \qquad |u|^{q(x)-2}u,(x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ u(x,t)=\partial_\nu u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega \end{cases}。$$

其中 $M(s):[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是局部 Lipschitz 连续函数，即

$$|M(s_1)-M(s_2)|\leqslant L|s_1-s_2|,s_1,s_2\in[0,\infty)。$$

作者通过 Banach 不动点定理、Faedo-Galerkin 方法及修正不等式技巧，在适当的假设下证明了解的局部存在性，具有负初始能量 $E(0)<0$ 解的爆破现象且给出了爆破时间的上界估计。

文献[8]研究了以下 Kirchhoff 型黏弹性双曲方程：

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt}-M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u+ \\ \qquad \int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau)\mathrm{d}\tau+|u_t|^{m(x)-2}u_t= \\ |u|^{p(x)-2}u,(x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega \end{cases},$$

其中 $M(s)=m_0+bs^\gamma$ 是正的 C^1 类函数。作者通过构造合适的函数来处理这类具有变指数源项的问题，并得到了初始能量为正时解的爆破时间的上界。

受文献[3-8]的启发，本文在初始能量有界的情况下，证明了解在有限时刻发生爆破，并通过构造微分不等式给出了爆破时间的上界，并进一步给出了爆破时间的下界。

1　准备工作

首先介绍空间 $L^{p(x)}(\Omega)$（参考文献[9-11]）。令：

$$p:\Omega\to(1,\infty)\text{是可测函数}, \tag{2}$$

引入以下记号：

$$L^{p(x)}(\Omega)=\left\{f\text{ 在 }\Omega\text{ 上可测}:\int_\Omega|f|^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

$$\|f\|_{p(x)}=\inf\left\{\lambda>0:\int_\Omega\left|\frac{f}{\lambda}\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant 1\right\}。$$

其中，$p(x)$ 满足以下条件：

$$p(x)\in[p^-,p^+]\subset(1,\infty)\ \text{a. e. }x\in\Omega。\tag{3}$$

引理 1　设(2)和(3)式成立，则对任意 $f\in L^{p(x)}(\Omega)$，有

$$\min\{\|f\|_{p(x)}^{p^-},\|f\|_{p(x)}^{p^+}\}\leqslant\int_\Omega|f|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant \max\{\|f\|_{p(x)}^{p^-},\|f\|_{p(x)}^{p^+}\}。$$

引理 2　设 $p(x)$ 和 $q(x)$ 满足(2)和(3)式，若 $p(x)\geqslant q(x)$ a. e. $x\in\Omega$，则有连续的嵌入 $L^{p(x)}(\Omega)\to L^{q(x)}(\Omega)$，且嵌入常数小于或等于 $1+|\Omega|$。

首先给出问题的弱解的定义。

定义 1　若 $u\in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$，$u_t\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^{m^-}(0,T;L^{m(x)}(\Omega))$，且对任意 $v\in C_0^\infty(\Omega)$，$t\in(0,T)$，都有：

$$(u_{tt},v)+(\Delta u,\Delta v)+(M(\|\nabla u\|_2^2)\nabla u,\nabla v)+(|u_t|^{m(x)-2}u_t,v)=(|u|^{p(x)-2}u,v),$$

则称 u 为问题(1)的弱解。

注 1：弱解的局部存在性可通过 Faedo-Galerkin 方法得到，参见文献[7]中定理 5，在本文中不作证明。问题(1)的解的局部存在性如下所示。

定理 1　设 $u_0\in H_0^2(\Omega)$，$u_1\in H_0^2(\Omega)$ 且

$$2\leqslant m^-\leqslant m(x)\leqslant m^+<\begin{cases}\infty, & \text{当 } N\leqslant 4\text{ 时}, \\ \dfrac{2N}{N-4}, & \text{当 } N\geqslant 5\text{ 时},\end{cases} \tag{4}$$

$$2<p^-\leqslant p(x)\leqslant p^+<\begin{cases}\infty, & \text{当 } N\leqslant 4\text{ 时}, \\ \dfrac{2(N-2)}{N-4}, & \text{当 } N\geqslant 5\text{ 时},\end{cases} \tag{5}$$

则问题(1)存在唯一局部弱解

$$u:=u(x,t)\in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$$

且

$$u_t\in L^\infty(0,T;(\Omega))\cap L^{m^-}(0,T;L^{m(x)}(\Omega))。$$

定义序列

$$\alpha_1:=(B_1^2)^{\frac{-2}{p^--2}},$$

$$E_1:=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p^-}\right)\alpha_1^{\frac{p^-}{2}},$$

且 $B_1=\max\{1,B\}$，其中 B 是嵌入 $H_0^2(\Omega)\to L^{p(x)}(\Omega)$ 的嵌入常数，即存在常数 B 使得

$$\|u\|_{p(x)}\leqslant B\|\Delta u\|_2,\forall u\in H_0^2(\Omega)。\tag{6}$$

定义能量泛函

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2+\frac{a}{2}\|\nabla u\|_2^2+$$

$$\frac{b}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\gamma+1)}-\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\mathrm{d}x,\tag{7}$$

若 u 是问题(1)的弱解,求导得

$$E'(t)=-\int_\Omega|u_t|^{m(x)}\mathrm{d}x\leqslant 0。\tag{8}$$

引理 3 设 $E(0)<E_1$ 且

$$2<p^-\leqslant p(x)\leqslant p^+<\begin{cases}\infty, & 当 N\leqslant 4 时,\\ \dfrac{2(N^2-2)}{N(N-2)}, & 当 N\geqslant 5 时,\end{cases}\tag{9}$$

设 u 是问题(1)的解,则

(Ⅰ)对 $B_1^2\|\Delta u_0\|_2^2>\alpha_1$,存在常数 $\alpha_2>\alpha_1$ 使得对 $\forall t\geqslant 0$ 有

$$B_1^2\|\Delta u\|_2^2\geqslant\alpha_2。\tag{10}$$

(Ⅱ)对 $B_1^2\|\Delta u_0\|_2^2<\alpha_1$,存在常数 $0<\widetilde{\alpha_2}<\alpha_1$ 使得对 $\forall t\geqslant 0$ 有

$$B_1^2\|\Delta u\|_2^2\leqslant\widetilde{\alpha_2}。\tag{11}$$

证明 由(6)、(7)式和引理1,得

$$E(t)\geqslant\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2-\frac{1}{p^-}\max\{\|u\|_{p(x)}^{p^+},\|u\|_{p(x)}^{p^-}\}\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2-\frac{1}{p^-}\max\{B^{p^+}\|\Delta u\|_2^{p^+},B^{p^-}\|\Delta u\|_2^{p^-}\}\geqslant$$

$$\frac{1}{2B_1^2}\alpha-\frac{1}{p^-}\max\{\alpha^{\frac{p^+}{2}},\alpha^{\frac{p^-}{2}}\}:=G(\alpha),\tag{12}$$

其中 $\alpha:=\alpha(t)=B_1^2\|\Delta u\|_2^2$,则 $G(\alpha)$ 满足

$$G'(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{2B_1^2}-\dfrac{p^+}{2p^-}\alpha^{\frac{p^+-2}{2}}, & \alpha>1\\ \dfrac{1}{2B_1^2}-\dfrac{1}{2}\alpha^{\frac{p^--2}{2}}, & 0<\alpha<1\end{cases},$$

$$G'_+(1)=\frac{1}{2B_1^2}-\frac{p^+}{2p^-}<0,$$

$$G'_-(1)=\frac{1}{2B_1^2}-\frac{1}{2}<0,$$

$$G'(\alpha_1)=0,0<\alpha_1<1。$$

因此 $G(\alpha)$ 在 $0<\alpha<\alpha_1$ 上严格递增,在 $\alpha_1<\alpha$ 上递减,当 $\alpha\to+\infty$ 时,$G(\alpha)\to-\infty$ 且 $G(\alpha)=E_1$。

因为 $E(0)<E_1$,存在 α_2 和 $\widetilde{\alpha_2}$ 且 $\alpha_2>\alpha_1>\widetilde{\alpha_2}$,使得 $G(\alpha_2)=G(\widetilde{\alpha_2})=E(0)$,令 $\alpha_0:=B_1^2\|\Delta u_0\|_2^2$,则

$$G(\alpha_0)\leqslant E(0)=G(\alpha_2)<G(\widetilde{\alpha_2})。\tag{13}$$

(Ⅰ)若 $B_1^2\|\Delta u_0\|_2^2>\alpha_1$ 则(13)式得 $\alpha_0\geqslant\alpha_2$,采用反证法证明(10),对 $t_0>0$,$\alpha(t_0)<\alpha_2$,由 $\alpha(t)$ 的连续性取 t_0 使得 $\alpha_1<\alpha(t_0)<\alpha_2$,有 $E(0)=G(\alpha_2)<G(\alpha(t_0))\leqslant E(t_0)$,这与(8)式矛盾。

(Ⅱ)若 $B_1^2\|\Delta u_0\|_2^2<\alpha_1$,则由(13)式得 $\alpha_0\leqslant\widetilde{\alpha_2}$,与(1)式相似,用反证法,对 $t^0>0$,$\alpha(t^0)>\widetilde{\alpha_2}$,由 $\alpha(t)$ 的连续性,取 t^0 使得 $\widetilde{\alpha_2}<\alpha(t^0)<\alpha_1$,有 $E(0)=G(\widetilde{\alpha_2})<G(\alpha(t^0))\leqslant E(t^0)$,这与(8)式矛盾。

引理 4 令 $H(t)=E_2-E(t)\geqslant 0$,其中 $E_2\in(E(0),E_1)$ 且与 $E(0)$ 足够近,即

$$E(0)-E_2<\mu,\forall\mu>0,$$

若对任意 $t\geqslant 0$,引理3(Ⅰ)成立,则

$$0<H(0)\leqslant H(t)\leqslant\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{1}{p^-}\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x。$$

证明 由(8)式得 $H(t)$ 关于 t 是不增的,所以对 $t>0$,$H(t)\geqslant H(0)=E_2-E(0)>0$。由(7)和(10)式得

$$H(t)\leqslant E_2-\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2+\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$E_2-\frac{\alpha_2}{2B_1^2}+\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$E_1-\frac{\alpha_1}{2B_1^2}+\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\mathrm{d}x。$$

注 2: 在引理4中,令 $H(t)=E_2-E(t)$,其中 $E_2\in(E(0),E_1)$ 与 $E(0)$ 足够近,必要性可以在定理2的证明中得到。

2 爆破规则和爆破时间的上界

定理 2 令(9)式和 $\max\{m^+,2(\gamma+1)\}<p^-$ 成立,设

$$B_1^2\|\Delta u_0\|_2^2>\alpha_1,E(0)<E_1,$$

则问题(1)的解 u 在有限时间 T^* 以 $\lim\limits_{t\to T^{*-}}\|u\|_{p(x)}=+\infty$ 的方式爆破,且爆破时间 T^* 满足

$$T^*\leqslant F^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)\frac{M_1}{M_2}\frac{1-\sigma}{\sigma},$$

其中

$$0<\sigma\leqslant\min\left\{\frac{p^--m^+}{p^-(m^+-1)},\frac{p^--2}{2p^-},\frac{\gamma}{\gamma+1}\right\}<\frac{1}{2},$$

M_1 和 M_2 将在(20)和(28)式中给出。

证明 对 $t\geqslant 0$,令 $H(t)=E_2-E(t)$。

定义辅助函数

$$F(t)=H^{1-\sigma}(t)+\varepsilon\int_\Omega u_t u\,\mathrm{d}x,$$

证明将以三个步骤展开。

(Ⅰ)估计 $F'(t)$。

对 $F(t)$ 求导并结合(1)式,取 $0<\varepsilon_1<1$,

$$F'(t)=(1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t)+\varepsilon\|u_t\|_2^2-$$

$$\varepsilon\|\Delta u\|_2^2-\varepsilon a\|\nabla u\|_2^2-\varepsilon b\|\nabla u\|_2^{2(\gamma+1)}-$$

$$\varepsilon\int_\Omega|u_t|^{m(x)-2}u_t u\,\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x-$$

$$\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)H(t)+\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)H(t)\geqslant$$

$$(1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t)+\varepsilon\left[1+\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}\right]\|u_t\|_2^2+ \varepsilon\left[\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right]\|\Delta u\|_2^2+ \varepsilon a\left[\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right]\|\nabla u\|_2^2+ \varepsilon b\left[\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2(r+1)}-1\right]\|\nabla u\|_2^{2(\gamma+1)}- \varepsilon\int_\Omega|u_t|^{m(x)-2}u_tu\,\mathrm{d}x-\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)E_2+ \varepsilon\varepsilon_1\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x+\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)H(t)。\quad(14)$$

由 $\varepsilon_2>1$ 的 Young 不等式、引理 1、嵌入 $L^{p(x)}(\Omega)\to L^{m(x)}(\Omega)$ 和 $H'(t)=-E'(t)$ 可得

$$\int_\Omega|u_t|^{m(x)-2}u_tu\,\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon_2H^{-\sigma}(t)\int_\Omega|u_t|^{m(x)}\mathrm{d}x+ \frac{1}{\varepsilon_2^{m^--1}}\int_\Omega|u|^{m(x)}H^{\sigma[m(x)-1]}(t)\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon_2H^{-\sigma}(t)H'(t)+ \frac{C_2H^{\sigma(m^+-1)}(t)}{\varepsilon_2^{m^-}-1}\max\{\|u\|_{p(x)}^{m^+},\|u\|_{p(x)}^{m}\}\leqslant \varepsilon_2H^{-\sigma}(t)\int_\Omega|u_t|^{m(x)}\mathrm{d}x+ \frac{C_1^{\sigma(m^--m^+)}H^{\sigma(m^+-1)}(t)}{\varepsilon_2^{m-1}}\int_\Omega|u|^{m(x)}\mathrm{d}x\leqslant \varepsilon_2H^{-\sigma}(t)\int_\Omega|u_t|^{m(x)}\mathrm{d}x+ \frac{C_2H^{\sigma(m^+-1)}(t)}{\varepsilon_2^{m^--1}}\max\{\|u\|_{p(x)}^{m^+},\|u\|_{p(x)}^{m^-}\}。\quad(15)$$

其中 $C_1=\min\{H(0),1\}$，$C_2=(1+|\Omega|)^{m^+}\cdot C_1^{\sigma(m^--m^+)}$。

另一方面，由引理 1 和引理 4 可得

$$\|u\|_{p(x)}^{m^+}\leqslant\max\left\{\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^+}},\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}}\right\}\leqslant \max\{(p^-H(t))^{\frac{m^+}{p^+}-\frac{m^+}{p^-}},1\}\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}},$$

$$\|u\|_{p(x)}^{m^-}\leqslant\max\{(p^-H(t))^{\frac{m^-}{p^+}-\frac{m^+}{p^-}},(p^-H(t))^{\frac{m^--m^+}{p^-}}\}\cdot\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}},$$

这意味着

$$\max\{\|u\|_{p(x)}^{+},\|u\|_{p(x)}^{-}\}\leqslant C_3\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}},\quad(16)$$

其中

$$C_3=2(\min\{p^-H(0),1\})^{\frac{m^-}{p^+}-\frac{m^+}{p^-}}。$$

又由 $0<\sigma\leqslant\dfrac{p^--m^+}{p^-(m^+-1)}$ 和引理 4 得

$$H^{\sigma(m^+-1)}(t)\max\{\|u\|_{p(x)}^{m^+},\|u\|_{p(x)}^{m^-}\}\leqslant C_3H^{\sigma(m^+-1)}(t)\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}}= C_3\frac{H^{\sigma(m^+-1)+\frac{m^+}{p_-}-1}(t)}{H^{\sigma(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}(0)}H^{1-\frac{m^+}{p^-}}(t)\cdot H^{\sigma(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}(0)\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}}\leqslant C_3\left(\frac{1}{p^-}\right)^{1-\frac{m^+}{p^-}}\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{m^+}{p^-}}\cdot H^{\sigma(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}(0)\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m^+}{p^-}}\leqslant C_3\left(\frac{1}{p^-}\right)^{1-\frac{m^+}{p^-}}C_1^{\sigma(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x。\quad(17)$$

由(14)、(15)和(17)式可得

$$F'(t)\geqslant(1-\sigma-\varepsilon\varepsilon_2)H^{-\sigma}(t)H'(t)+ \varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)H(t)-\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)E_2+ \varepsilon\left[1+\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}\right]\|u_t\|_2^2+\varepsilon\left[\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right]\|\Delta u\|_2^2+ \varepsilon\left[\varepsilon_1-\frac{\sigma_1^{\sigma(m^+-1)++\frac{m^+}{p^-}-1}C_2C_3\left(\frac{1}{p^-}\right)^{1-\frac{m}{p^-}}}{\varepsilon_2^{m^--1}}\right]\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x+ \varepsilon a\left[\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right]\|\nabla u\|_2^2+ \varepsilon b\left[\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2(r+1)}-1\right]\|\nabla u\|_2^{2(\gamma+1)}。\quad(18)$$

取 $0<\varepsilon_1<\dfrac{p^--2(\gamma+1)}{p^-}<\dfrac{p^--2}{p^-}$ 足够小，并取 $E_2\in(E(0),E_1)$ 与 $E(0)$ 足够接近使得

$$E_2\leqslant\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{p^-(1-\varepsilon_1)}\right]\alpha_1^{\frac{p^-}{2}}<E_1。$$

由引理 3(Ⅰ)得

$$\varepsilon\left[\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right]\|\Delta u\|_2^2-\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)E_2\geqslant \varepsilon\left[\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right]\frac{\alpha_2}{B_1^2}-\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)E_2\geqslant \varepsilon\left[\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right]\alpha_1^{\frac{p^-}{2}}-\varepsilon p^-(1-\varepsilon_1)E_2\geqslant0。$$

取常数 ε_2 使得

$$\varepsilon_1>\frac{C_1^{\sigma(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}C_2C_3\left(\frac{1}{p^-}\right)^{1-\frac{m^+}{p^-}}}{\varepsilon_2^{m^--1}},$$

取足够小的 ε，使得 $1-\sigma>\varepsilon\varepsilon_2$，则(18)式可以写成

$$F'(t)\geqslant M_1\|u_t\|_2^2+H(t)+\|\nabla u\|_2^{2(\gamma+1)}+\|\nabla u\|_2^2+\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x。\tag{19}$$

其中

$$M_1=\varepsilon\min\left\{1+\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2},(1-\varepsilon_1)p^-,a\left[\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right],b\left[\frac{p^-(1-\varepsilon_1)}{2(r+1)}-1\right],\left[\varepsilon_1-\frac{C_1^{\sigma(m^+-1)+\frac{m^+}{p^-}-1}C_2C_3\left(\frac{1}{p^-}\right)^{1-\frac{m^+}{p^-}}}{\varepsilon_2^{m^--1}}\right]\right\}。\tag{20}$$

(Ⅱ)估计 $F^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)$。

由 $F(t)$ 的表达式可得

$$F^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)=\left[H^{1-\sigma}(t)+\varepsilon\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}。\tag{21}$$

另一方面,应用 Hölder 不等式、嵌入 $L^{p(x)}(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 和 Young 不等式得到

$$\left|\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}\leqslant(\|u_t\|_2\|u\|_2)^{\frac{1}{1-\sigma}}\leqslant(1+|\Omega|)^{\frac{1}{1-\sigma}}\|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\sigma}}\|u\|_{p(x)}^{\frac{1}{1-\sigma}}\leqslant C_4\|u_t\|_2^2+C_5\|u\|_{p(x)}^{\frac{2}{2(1-\sigma)-1}},\tag{22}$$

其中

$$C_4=\frac{(1+|\Omega|)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{2(1-\sigma)},C_5=\frac{(1+|\Omega|)^{\frac{1}{1-\sigma}}[2(1-\sigma)-1]}{2(1-\sigma)}。$$

再由 $0<\sigma\leqslant\frac{p^--2}{2p^-}$、引理1和引理4,可得

$$\|u\|_{p(x)}^{\frac{2}{2(1-\sigma)-1}}\leqslant\max\left\{\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p^-[2(1-\sigma)-1]}},\left(\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p^+[2(1-\sigma)-1]}}\right\}\leqslant$$

$$\max\{(p^-H(t))^{\frac{2-p^-[2(1-\sigma)-1]}{p^-[2(1-\sigma)-1]}},(p^-H(t))^{\frac{2-p^+[2(1-\sigma)-1]}{p^+[2(1-\sigma)-1]}}\}\cdot\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant C_6\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x,\tag{23}$$

其中

$$C_6=(\min\{p^-H(0),1\})^{\frac{2-p^+[2(1-\sigma)-1]}{p^+[2(1-\sigma)-1]}}。$$

将(23)式代入(22)式得

$$\left|\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}\leqslant C_4\|u_t\|_2^2+C_5C_6\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x。\tag{24}$$

所以,结合(23)、(21)式和

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^l\leqslant2^{(m-1)(l-1)}(a_1^l+a_2^l+\cdots+a_m^l),\tag{25}$$

其中

$$a_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,m),l\geqslant1,m\geqslant1,$$

可得

$$F^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)\leqslant2^{\frac{2\sigma}{1-\sigma}}\left(H(t)+\varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}}\left|\int_\Omega utu\mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)\leqslant2^{\frac{2\sigma}{1-\sigma}}\left(H(t)+\varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}}C_4\|u_t\|_2^2+\varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}}C_5C_6\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)\leqslant$$

$$M'_2\left(H(t)+\|u_t\|_2^2+\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)\leqslant M_2\left(H(t)+\|u_t\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla u\|_2^{2(\gamma+1)}+\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\right),\tag{26}$$

其中

$$M_2=2^{\frac{2\sigma}{1-\sigma}}\max\{1,\varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}}C_4,\varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}}C_5C_6\}。\tag{27}$$

(Ⅲ)爆破的结果。

结合(19)、(27)式得

$$F^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)\leqslant\frac{M_2}{M_1}F'(t),\tag{28}$$

并由 Gronwall 不等式得

$$F^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t)\geqslant\frac{1}{F^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)-\frac{M_2}{M_1}\frac{\sigma}{1-\sigma}t}。$$

显然,在有限时刻 T^* 满足 $F(t)\to+\infty$,且

$$T^*\leqslant F^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)\frac{M_1}{M_2}\frac{1-\sigma}{\sigma},$$

其中取 $\varepsilon>0$ 使得

$$F(0)=H^{1-\sigma}(0)+\varepsilon\int_\Omega u_1u_0\mathrm{d}x>0。$$

接下来将证明

$$\lim_{t\to T^{*-}}F(t)\to+\infty\Rightarrow\lim_{t\to T^{*-}}\|u\|_{p(x)}=+\infty。$$

从 $F(t)$ 的定义考虑以下三种情况:

情况1 当 $H(t)\to+\infty$ 时,引理4得 $\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\to+\infty$,再由引理1得 $\lim\limits_{t\to T^{*-}}\|u\|_{p(x)}=+\infty$。

情况2 当 $\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x\to+\infty$ 时,由 Cauchy 不等式和嵌入常数为 $S>0$ 的嵌入 $H_0^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 得

$$\int_\Omega u_tu\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\|u\|_2^2\leqslant\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}S^2\|\nabla u\|_2^2。\tag{29}$$

再由(8)式和 $E(t)\leqslant E(0)<E_1$ 得

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{a}{2}\|\nabla u\|_2^2\leqslant\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2+\frac{a}{2}\|\nabla u\|_2^2+\frac{b}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|_2^{2(\gamma+1)}=E(t)+$$

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}\mathrm{d}x \leqslant E(0)+\frac{1}{p^-}\int_\Omega |u|^{p(x)}\mathrm{d}x, \tag{30}$$

结合(29)、(30)式和引理 1，若$\int_\Omega u_t u\,\mathrm{d}x \to +\infty$，则$\lim\limits_{t\to T^{*-}}\|u\|_{p(x)}=+\infty$。

情况 3　当$\|\nabla u\|_2^2\to+\infty$时，由(30)式得

$$\lim_{t\to T^{*-}}\|u\|_{p(x)}=+\infty。$$

3　爆破时间的下界

接下来我们研究当$2<p^+<\frac{2(N-2)}{N-4}$时，解的爆破时间的下界。

定理 3　若定理 2 的条件都成立，且

$$2<p^+\leqslant\frac{2(N-1)}{N-2},$$

则爆破时间T^*的下界满足以下估计

$$\int_{\Phi(T_0)}^{+\infty}\frac{b}{C_7 y^{p^+-1}+C_8 y+C_9}\mathrm{d}y+T_0\leqslant T^*,$$

其中$\Phi(T_0)$，C_7，C_8，C_9将会在之后给出。

证明　定义$\Phi(t):=\|u\|_{p^+}^{p^+}$，求导得

$$\Phi'(t)=p^+\int_\Omega |u|^{p^+-2}uu_t\,\mathrm{d}x\leqslant p^+(\|u\|_{2(p^+-1)}^{2(p^+-1)}+\|u_t\|_2^2)。\tag{31}$$

由嵌入$H_0^1(\Omega)\to L^{2(p^+-1)}(\Omega)$得

$$\|u\|_{2(p^+-1)}^{(p^+-1)}\leqslant B^{2(p^+-1)}\|\nabla u\|_2^{2(p^+-1)}, \tag{32}$$

由(30)式得

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{a}{2}\|\nabla u\|_2^2\leqslant E(0)+\frac{1}{p^-}\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant E(0)+\frac{\Phi(t)}{p^-}+\frac{|\Omega|}{p^-}。\tag{33}$$

结合(31)—(33)式得

$$\Phi'(t)\leqslant p^+B^{2(p^+-1)}2^{p^+-1}a^{1-p^+}\left[E(0)+\frac{\Phi(t)}{p^-}+\frac{|\Omega|}{p^-}\right|^{p^+-1}+2p^+\left[E(0)+\frac{\Phi(t)}{p^-}+\frac{|\Omega|}{p^-}\right]\leqslant C_7\Phi^{p^+-1}(t)+C_8\Phi(t)+C_9, \tag{34}$$

其中

$$C_7=p^+B^{2(p^+-1)}2^{p^+-1}a^{1-p^+}2^{p^+-2}\left(\frac{1}{p^-}\right)^{p^+-1}, C_8=\frac{2p^+}{p^-},$$

$$C_9=C_7(p^-)^{p^+-1}\left[E(0)+\frac{|\Omega|}{p^-}\right]^{p^+-1}+C_8p^-\left[E(0)+\frac{|\Omega|}{p^-}\right]。$$

再利用定理 2 得

$$\int_{\Phi(\Psi_0)}^{+\infty}\frac{1}{C_7 y^{p^+-1}+C_8 y+C_9}\mathrm{d}y+T_0\leqslant T^*,$$

其中

$$\Phi(T_0)=\|u(T_0)\|_{p^+}^{p^+}。$$

我们注意到嵌入$H_0^1(\Omega)\to L^{2(p^+-1)}(\Omega)$只对$2<p^+\leqslant\frac{2(N-1)}{N-2}$成立，所以我们对$\frac{2(N-1)}{N-2}<p^+<\frac{2(N-2)}{N-4}$构造一个新的控制函数并应用能量方法得到下界估计。

定理 4　若定理 2 的条件都成立且

$$\frac{2(N-1)}{N-2}<p^+<\frac{2(N-2)}{N-4},$$

则爆破时间T^*的下界满足以下估计

$$\int_{\Psi(\tau_0)}^{+\infty}\frac{1}{C_{14}y^\eta(t)+C_{15}y^\zeta(t)+C_{16}}\mathrm{d}y+T_0\leqslant T^*,$$

其中$\Psi(T_0)$，C_{14}，C_{15}，C_{16}，ζ，η将会在下文给出。

证明　定义$\Psi(t)=\|u\|_\delta^\delta$，其中$\delta=\frac{2(N-1)}{N-2}$，

与(31)式相似，求导得

$$\Psi\Psi'(t)\leqslant\delta(\|u\|_{2(\delta-1)}^{2(\delta-1)}+\|u_t\|_2^2)。\tag{35}$$

因为$2(\delta-1)=\frac{2N}{N-2}$，由嵌入$H_0^1(\Omega)\to L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$得

$$\|u\|_{2(\delta-1)}^{(\delta-1)}\leqslant B^{\frac{2N}{N-2}}\|\nabla u\|_2^{\frac{2N}{N-2}}, \tag{36}$$

由(30)式得

$$\|\nabla u\|_2^{\frac{2N}{N-2}}\leqslant\left[\frac{2}{a}\left(E(0)+\frac{\Phi(t)}{p^-}+\frac{|\Omega|}{p^-}\right)\right]^{\frac{N}{N-2}}, \tag{37}$$

$$\|u_t\|_2^2\leqslant 2\left(E(0)+\frac{\Phi(t)}{p^-}+\frac{|\Omega|}{p^-}\right)。\tag{38}$$

结合(35)和(36)—(38)式

$$\Psi'(t)\leqslant C_{10}\left(E(0)+\frac{\Phi(t)}{p^-}+\frac{|\Omega|}{p^-}\right)^{\frac{N}{N-2}}+C_{11}\left(E(0)+\frac{\Phi(t)}{p^-}+\frac{|\Omega|}{p^-}\right), \tag{39}$$

其中

$$C_{10}=\delta\cdot B^{\frac{2N}{N-2}}\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{N}{N-2}}, C_{11}=2\delta。$$

由插值不等式得

$$\Phi(t)\leqslant B^{\theta p^+}\|u\|_\delta^{(1-\theta)p^+}\|\nabla u\|_2^{\theta p^+}, \tag{40}$$

其中，$\frac{1}{p^+}=\frac{1-\theta}{\delta}+\frac{\theta}{\frac{2N}{N-2}}$。

由$\frac{2(N-1)}{N-2}<p^+<\frac{2(N^2-2)}{N(N-2)}$，得$0<\frac{\theta p^+}{2}<1$，又由$\varepsilon>0$的 Young 不等式，得

$$\Phi(t)\leqslant B^{\theta p^+}\varepsilon^{\frac{\theta p^+-2}{p^+}}\|u\|_\delta^{\frac{2(1-\theta)p^+}{2-\theta p^+}}+B^{\theta p^+}\varepsilon\|\nabla u\|_2^2\leqslant B^{\theta p^+}\varepsilon^{\frac{\theta p^+}{p^+-2}}\|u\|_\delta^{\frac{2(1-\theta)p^+}{2-\theta p^+}}+B^{\theta p^+}\varepsilon\frac{2}{a}\left[E(0)+\frac{\Phi(t)}{p^-}+\frac{|\Omega|}{p^-}\right], \tag{41}$$

取 $1-B^{\theta p^+}\varepsilon\frac{2}{a}\frac{1}{p^-}>0$,并结合(30)式,则式(41)可变为

$$\Phi(t)\leqslant C_{12}\Psi^{\frac{2(1-\theta)p^+}{\delta(2-\theta p^+)}}(t)+C_{13}, \tag{42}$$

其中

$$C_{12}=\frac{B^{\theta p^+}\varepsilon^{\frac{\theta p^+}{\theta p^+-2}}}{1-B^{\theta p^+}\varepsilon\frac{2}{a}\frac{1}{p^-}},C_{13}=\frac{B^{\theta p^+}\varepsilon\frac{2}{a}\left[E(0)+\frac{|\Omega|}{p^-}\right]}{1-B^{\theta p^+}\varepsilon\frac{2}{a}\frac{1}{p^-}}。$$

由定理2得 $\lim\limits_{t\to T^{*+}}\Psi(t)=+\infty$。

结合(39)、(42)和(43)式得

$$\Psi'(t)\leqslant C_{14}\Psi^{\eta}(t)+C_{15}\Psi^{\zeta}(t)+C_{16}, \tag{43}$$

其中

$$\zeta=\frac{2(1-\theta)p^+}{\delta(2-\theta p^+)},\eta=\frac{N\zeta}{N-2},$$

$$C_{14}=C_{10}\cdot 2\frac{N}{N-2}-1\left(\frac{1}{p^-}\right)^{\frac{N}{N-2}}\cdot C_{12}^{\frac{N}{N-2}},C_{15}=\frac{C_{11}C_{12}}{p^-},$$

$$C_{16}=C_{10}\cdot 2^{\frac{N}{N-2}-1}\left[E(0)+\frac{|\Omega|}{p^-}+C_{13}\right]^{\frac{N}{N-2}}+C_{11}\left[E(0)+\frac{|\Omega|}{p^-}+C_{12}\right],$$

由不等式(43)得

$$\int_{\Psi(T_0)}^{+\infty}\frac{1}{C_{14}y^{\eta}(t)+C_{15}y^{\zeta}(t)+C_{16}}\mathrm{d}y+T_0\leqslant T^*,$$

其中

$$\Psi(T_0)=\|u(T_0)\|_{\delta}^{\delta}。$$

参考文献:

[1] Messaoudi S A. Global existence and nonexistence in a system of Petrovsky[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 265(2): 296-308.

[2] Wu S T, Tsai L Y. On global solutions and blow-up of solutions for a nonlinearly dampedPetrovsky system[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2009, 13(2): 545-558.

[3] Baghaei K. Lower bounds for the blow-up time in a superlinear hyperbolic equation with linear damping term[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2017, 73: 560-564.

[4] Sun L L, Guo B, Gao W J. A lower bound for the blow-up time to a damped semilinear wave equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 37: 22-25.

[5] Guo B, Liu F. A lower bound for the blow-up time to a viscoelastic hyperbolic equation with nonlinear sources[J]. Applied Mathematics Letters, 2016, 60: 115-119.

[6] Messaoudi S A, Talahmeh A A, Al-Smail J H. Nonlinear damped wave equation: Existence and blow-up[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2017, 74: 3024-3041.

[7] Antontsev S N, Ferreira J, Pişkin E et al. Existence and non-existence of solutions for Timoshenko-type equations with variable exponents[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2021, 61: 103341.

[8] Liao M L, Guo B, Zhu X Y. Bounds for blow-up time to a viscoelastic hyperbolic equation of Kirchhoff type with variable sources [J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2020, 170: 755-772.

[9] Fan X L, Zhao D. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 263: 424-446.

[10] Fan X L, Zhang Q H. Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem[J]. Nonlinear Analysis, 2003, 52: 1843-1852.

[11] Antontsev S, Shmarev S. Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up[M]. Paris: Atlantis Press, 2015: 4-27.

The Blow-Up Properties of Solutions to a Class of Petrovsky Equations with Variable Exponential Source Terms

Chen Jing[1], Wang Jian[1], Liao Menglan[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100, China; 2. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper, we study the blow up properties of solutions of a class to Petrovsky equations featuring variable exponential source terms. Under the condition that the initial energy is bounded, the author prove that the blow up of solution in finite time by using the energy functional and constructing auxiliary functions. Furthermore, obtain the upper and lower bounds of the blow up time.

Key words: blow up of solution; variable exponential source terms; blow up time; upper and lower bounds

AMS Subject Classifications: 35B44; 35L60

责任编辑 朱宝象